ENOS LOLANG, S.SI, M.PD
DR. SELVI R. TANDISERU, M.SC

DASAR-DASAR MATEMATIKA DISKRIT DENGAN PENDEKATAN PROBLEM SOLVING

PENERBIT
UKI TORAJA PRESS

Katalog Dalam Terbitan (KDT)

Dasar-Dasar Matematika Diskrit
Dengan Pendekatan Problem Solving

Penyusun:
Enos Lolang, S.Si., M.Pd.
Dr. Selvi R. Tandiseru, M.Sc.

Proses Penyusunan: Maret 2015 – Desember 2017
Layout : Enos Lolang, S.Si., M.Pd.

Pembaca Naskah/Editor:
Dr. Selvi R. Tandiseru, M.Sc.

Diterbitkan oleh UKI Toraja Press
Jl. Nusantara No. 12 Makale, Telp. (0423)22887
Fax: (0423)22073
Email: ukitoraja@yahoo.com
Website: www.ukitoraja.ac.id

Desain Sampul: www.canva.com
ISBN: 978-602-18328-8-2

KATA PENGANTAR

Untuk membenahi UKI Toraja, terutama dalam rangka memperbaiki infrastruktur dan fasilitas belajar lainnya terus diupayakan pelaksanaannya, termasuk pengadaan buku-buku referensi. Selama ini buku-buku referensi masih belum dapat disusun dan diterbitkan sendiri oleh para dosen UKI Toraja. Selain itu buku/diktat kuliah yang dijadikan sebagai literatur oleh mahasiswa belum memiliki ISBN dan tidak tercatat dalam KDT Perpustakaan Nasional Republik Indonesia.

Buku *Dasar-Dasar Matematika Diskrit Dengan Pendekatan Problem Solving* yang disusun oleh Enos Lolang, S.Si., M.Pd., dan Dr. Selvi R. Tandiseru, M.Sc., merupakan salah satu buku yang disusun oleh dosen UKI Toraja yang diajukan untuk memperoleh ISBN dari PNRI. Buku ini diharapkan dapat menjadi buku rujukan dalam pelaksanaan proses pembelajaran mata kuliah Matematika Diskrit di lingkungan Program Studi Pendidikan Matematika pada khususnya, dan di dalam lingkungan UKI Toraja pada umumnya.

Sebagai rektor, saya sangat mendukung dan berterima kasih atas upaya staf dosen untuk menulis dan menerbitkan buku-buku literatur yang semakin berkualitas.

Makale, Desember 2017
Rektor UKI Toraja.

KATA PENGANTAR

Buku *Dasar-Dasar Matematika Diskrit Dengan Pendekatan Problem Solving* ini merupakan hasil kompilasi bahan-bahan ajar yang digunakan penulis selama mengajarkan mata kuliah Matematika Diskrit pada Program Studi Pendidikan Matematika di UKI Toraja. Untuk memperluas cakupan materi di dalamnya, penyusunan buku ini juga dilakukan dengan merujuk pada berbagai rujukan yang relevan. Pendalaman materi dapat diperkuat apabila mahasiswa berusaha mempelajari semua soal-soal yang terdapat di bagian akhir dari setiap bab.

Penyusunan buku ini telah dilakukan sejak dua tahun yang lalu. Tetapi karena adanya berbagai kendala dan adanya penyesuaian materi kuliah, maka buku ini baru dapat diselesaikan dan dapat diterbitkan pada akhir semester gasal 2017/2018 ini. Tentu saja masih terdapat banyak kesalahan dan kekeliruan di dalamnya, tetapi kiranya hal tersebut kiranya tidak menjadi halangan untuk terus memperbaiki dan mengembangkan buku ini. Karena itu sangat diharapkan pengguna dapat menyampaikan saran dan koreksinya sehingga kesalahan-kesalahan yang terjadi dapat diperbaiki.

Makale, Desember 2017
Penulis.

DAFTAR ISI

BAB I
DASAR-DASAR LOGIKA
DAN PEMBUKTIAN MATEMATIKA

Matematika merupakan kajian abstrak yang rumit. Karena itu untuk mempelajari matematika kita harus menerima fakta bahwa banyak konsep matematika yang tidak dapat dirumuskan dengan cara yang sederhana. Untuk menyatakan bahwa suatu pernyataan adalah benar, harus dibuktikan kebenaran dari kajian tersebut.

Suatu argumen matematis diterima sebagai pernyataan yang benar karena adanya **bukti**. Bukti bahwa suatu pernyataan matematis adalah pernyataan yang benar dinamkan **teorema**. Beberapa teorema pada topik yang sama akan mem-bentuk **logika.** Untuk mempelajari suatu topik matematika kita harus menyusun argumen-argumen matematis dalam topik tersebut, tidak cukup hanya dengan membaca penjelasannya. Dengan memahami bukti dari suatu teorema maka bukti tersebut dapat dikembangkan dan disesuaikan dengan situasi baru.

A. Pernyataan atau Proposisi

Definisi 1.1. Pernyataan atau proposisi adalah kalimat deklaratif yang bernilai benar atau salah tetapi tidak dapat bernilai benar dan sekaligus salah.

Kalimat-kalimat di bawah ini adalah pernyataan:

- Sebarang bilangan genap dapat dinyatakan sebagai $2n$, dengan $n \in \mathbb{Z}$.
- Bilangan 6 adalah bilangan prima.
- Akar kuadrat dari suatu bilangan selalu lebih kecil dari bilangan itu sendiri.
- $(e^{\pi})^2 = e^{2\pi}$
- Semua warganegara Indonesia sudah pernah melihat Tugu Monas secara langsung.

Kalimat-kalimat di bawah ini bukan pernyataan:

- Apakah $(e^{\pi})^2 = e^{2\pi}$?
- Nilai $x > 5$
- Siapa yang lahir pada bulan Agustus?
- Hari ini kita akan mengunjungi Taman Safari
- Sebaiknya kamu tidak perlu menghadiri pertemuan itu.
- Buktikanlah bahwa $x + 2 = 8$

B. Kuantor

B.1. Pernyataan Berkuantor

Kalimat yang mengandung variabel tidak dapat dikatakan sebagai suatu pernyataan. Kalimat "$x+2$ adalah bilangan bulat", tidak dapat dipastikan nilai logikanya benar atau salah, karena adanya variabel *x*. Jika *x* diganti dengan -5, -1, atau 3, maka pernyataan yang dihasilkan akan bernilai salah. Kalimat seperti ini dinamakan kalimat terbuka.

Jika variabel-variabel dari suatu kalimat terbuka diganti dengan nilai tertentu, maka kalimat tersebut akan memiliki nilai logika tertentu. Selain meng-ganti variabelnya, pembentukan suatu proposisi dari fungsi proposisi juga dapat dilakukan dengan cara kuantifikasi. Pernyataan-pernyataan terkuantifikasi dapat menyatakan benar atau tidaknya proposisi yang dibicarakan. Pembahasan yang melibatkan proposisi dan kuantifikasi seperti ini dinamakan *kalkulus predikat.*

Definisi 1.2. Suatu kalimat deklaratif disebut kalimat terbuka jika:

1. Kalimat tersebut mengandung satu atau lebih variabel, dan
2. Kalimat tersebut bukan merupakan pernyataan, tetapi
3. Kalimat tersebut berubah menjadi pernyataan jika variabel-variabelnya diganti dengan nilai tertentu yang dimungkinkan.

Jika kalimat "$\mathrm{x}+2$ adalah bilangan genap" diuji berdasarkan Definisi 1.2, maka dapat diketahui bahwa kalimat tersebut merupakan kalimat terbuka yang mengandung variabel tunggal *x*. Misalkan "$\mathrm{x}+2$ adalah bilangan genap" dilam-bangkan dengan $\mathrm{p(x)}$ maka $\sim\mathrm{p(x)}$ dapat dibaca sebagai kalimat terbuka yang berbunyi "$\mathrm{x}+2$ *bukan* bilangan genap," atau "$\mathrm{x}+2$ adalah bilangan ganjil."

$\mathrm{p(5)}$: 7 (= 5 + 2) adalah bilangan genap (Salah)

$\sim\mathrm{p(7)}$: 9 bukan bilangan genap (Benar)

Selanjutnya kalimat terbuka yang mengandung dua variabel dapat digunakan notasi $\mathrm{q(x,y)}$ misalnya $\mathrm{q(x,y): y+2, x-y,}$ dan $\mathrm{x+2y}$ adalah bilangan genap.

$\mathrm{q(4,2)}$: 4, 2, dan 8 adalah bilangan genap (Benar)

Beberapa pernyataan dapat bernilai logika benar, dan beberapa per-nyataan lainnya bernilai logika salah. Oleh karena itu secara umum kalimat terbuka yang bernilai logika benar dapat dituliskan sebagai berikut:

(1). Untuk suatu *x*, berlaku $\mathrm{p(x)}$.

(2). Untuk beberapa $\mathrm{(x,y)}$ berlaku $\mathrm{p(x,y)}$.

Pernyataan-pernyataan “untuk suatu *x*, berlaku $\sim p(x)$” dan “untuk beberapa *x, y,* berlaku $\sim q(x, y)$,” juga bernilai benar. Karena pernyataan “untuk suatu *x* berlaku $p(x)$” dan “untuk suatu *x* berlaku $\sim p(x)$” kedua-duanya bernilai benar, maka pernyataan kedua bukanlah negasi dari pernyataan yang pertama, meskipun pernyataan kalimat terbuka $\sim p(x)$ adalah negasi dari pernyataan $p(x)$. Hal yang sama juga berlaku untuk pernyataan $q(x, y)$ dan $\sim q(x, y)$. Kata-kata seperti “untuk suatu *x*” dan “untuk beberapa *x*, *y*” digunakan untuk meng-kuantifikasi kalimat terbuka $p(x)$ dan $q(x, y)$.

B.2. Kuantor Universal dan Kuantor Eksistensial

Di dalam matematika terdapat banyak postulat, definisi, dan teorema, yang mengkuantifikasi kalimat terbuka. Kuantifikasi tersebut dapat berbentuk kuantor eksistensial atau kuantor universal. Pernyataan (1) yang menggunakan kuantor eksistensial, “untuk suatu *x*,” dapat pula dinyatakan sebagai “untuk setidak-tidaknya satu *x*” atau “terdapat suatu *x* sedemikian sehingga.” Kuantor seperti ini dituliskan dengan lambang $\exists x$ sehingga pernyataan “untuk suatu *x,* berlaku $p(x)$” secara ringkas dapat dinyatakan dengan lambang $\exists x, p(x)$. Selanjut-nya pernyataan (2) menjadi $\exists x \exists y, q(x, y)$ atau $\exists x, y, q(x, y)$. Kuantor universal dilambangkan dengan $\forall x$ untuk menyatakan “untuk semua *x*,” “untuk sebarang *x*.” Jadi pernyataan “untuk semua *x,y,*” “untuk sebarang *x,y,*” atau “untuk semua *x* dan *y*” dituliskan dengan notasi $\forall x \forall y$ atau $\forall x, y$. Jika suatu kalimat terbuka $r(x)$: “2*x* adalah bilangan genap” dengan himpunan semesta semua bilangan bulat, maka pernyataan $\forall x, r(x)$ adalah pernyataan yang benar. Jika pernyataan $\forall x, r(x)$ benar, maka semua bilangan bulat yang digunakan untuk mengganti *x* di dalam $r(x)$ selalu menghasilkan pernyataan yang benar. Sebaliknya jika pernya-taan $\exists x, r(x)$ merupakan pernyataan yang benar, maka pernyataan $\forall x, \sim r(x)$ dan $\exists x, \sim r(x)$ merupakan pernyataan yang salah karena $\forall x, \sim r(x)$ dan $\exists x, \sim r(x)$ adalah negasi dari $\exists x, r(x)$.

Variabel *x* dalam pernyataan $p(x)$ dan $r(x)$ disebut variabel bebas. Jika nilai *x* diganti dengan salah satu anggota himpunan semestanya, maka nilai kebe-naran pernyataan tersebut dapat diketahui. Jika $p(x)$ adalah pernyataan “*x* + 2 adalah bilangan genap,” maka dengan mengganti nilai variabel bebasnya, dapat diketahui bahwa $p(2)$ merupakan pernyataan yang benar tetapi merupakan per-nyataan yang salah untuk $p(3)$. Meskipun demikian, kalimat terbuka $r(x)$ akan menjadi suatu pernyataan yang benar untuk setiap subtitusi *x* yang diambil dari himpunan semesta bilangan bulat karena kuantifikasinya berlaku untuk semua *x*. Tidak demikian halnya untuk kalimat terbuka $p(x)$, pernyataan $\exists x, p(x)$ memiliki nilai logika yang selalu benar. Dalam representasi simbolik $\exists x, p(x)$, variabel *x* dinamakan variabel batas karena dibatasi oleh kuantor eksistensial $\exists$. Kasus yang sama berlaku juga untuk pernyataan $\forall x, r(x)$ dan $\forall x, \sim r(x)$, pada setiap kasus variabel *x* dibatasi oleh kuantor universal $\forall$. Untuk kalimat terbuka $q(x, y)$ terda-pat dua variabel bebas, yang kedua-duanya dibatasi oleh kuantor $\exists$ pada pernya-taan $\exists x \exists y, q(x, y)$ atau $\exists x, y, q(x, y)$.

Definisi 1.3. Kuantor Universal. Pernyataan $\forall x \in U, p(x)$ bernilai benar jika dan hanya jika untuk setiap nilai $x \in U$ pernyataan $p(x)$ berlaku. Konsekuensinya, pernyataan di atas akan bernilai salah jika dan hanya jika ada $x \in U$ yang meng-akibatkan $p(x)$ tidak berlaku.

Contoh 1.1. Setiap bilangan real yang lebih dari 2, kuadratnya adalah bilangan bulat. Dituliskan dengan notasi kuantor sebagai berikut: $\forall x \in \mathbb{R}, x > 2 \Rightarrow x^2 \in \mathbb{Z}$.

Contoh 1.2. Kuadrat dari semua bilangan real adalah bilangan non-negatif. Dinyatakan dengan notasi kuantor sebagai berikut: $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$.

Contoh 1.3. Untuk setiap bilangan real *x*, jika *x* negatif, maka |*x*| = -*x*. Dinyatakan dengan notasi kuantor sebagai berikut: $\forall x \in \mathbb{R}, x < 0 \Rightarrow |x| = -x$

Contoh 1.4. Untuk setiap *x* bilangan real dengan $2 \leq x \leq 5$, diperoleh $4 \leq x^2 \leq 25$ dinyatakan dengan notasi kuantor sebagai berikut:
$\forall x \in \mathbb{R}, 2 \leq x \leq 5 \Rightarrow 4 \leq x^2 \leq 25$.

Definisi 1.4. Kuantor Eksistensial. Pernyataan $\exists x \in U$ sedemikian sehingga $p(x)$, bernilai benar jika dan hanya jika terdapat suatu $x \in U$ sehingga berlaku $p(x)$ Sebaliknya, pernyataan tersebut bernilai salah jika dan hanya jika untuk setiap $x \in U$ maka $p(x)$ tidak berlaku.

Contoh 1.5. Ada $x \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $x^2 = 2$. $\exists x \in \mathbb{R} \ni x^2 = 2$.

Contoh 1.6. Akar dari persamaan $5x^2 = 40$ adalah suatu bilangan bulat.

Contoh 1.7. Ada dua bulangan bulat yang berbeda sedemikian sehingga pangkat tiga dari kedua bilangan tersebut bernilai sama.

Untuk himpunan semua bilangan real, kalimat terbuka $p(x), q(x), r(x),$ dan $s(x)$ yang dinyatakan dengan

$$\begin{array}{llll} p(x) & : x \geq 0 & r(x) & : x^2 - 3x - 4 = 0 \\ q(x) & : x^2 \geq 0 & s(x) & : x^2 - 3 > 0 \end{array}$$

Mengakibatkan pernyataan-pernyataan di bawah ini menjadi benar.

1). $\exists x \left[p(x) \wedge r(x) \right]$

Bilangan real 4, misalnya, adalah anggota himpunan semesta sedemikian sehingga pernyataan $p(4)$ dan $r(4)$ merupakan pernyataan yang benar.

2). $\forall x \left[p(x) \Rightarrow q(x) \right]$

Jika di dalam $p(x)$ diganti *x* dengan suatu bilangan real negatif *a*, maka $p(a)$ merupakan pernyataan yang salah, tetapi $p(a) \Rightarrow q(a)$ adalah pernyataan yang benar, tidak tergantung pada nilai logika untuk $q(a)$. Jika nilai *x* pada per-nyataan $p(x)$ diganti dengan suatu bilangan real nonnegatif *b*, maka $p(b)$ dan $q(b)$ akan bernilai benar, demikian juga $p(b) \Rightarrow q(b)$. Akibatnya, $p(x) \Rightarrow q(x)$ bernilai benar untuk semua *x* yang diambil dari himpunan semesta semua bilangan real, dan pernyataan berkuantor $\forall x \left[p(x) \Rightarrow q(x) \right]$ adalah benar. Pernyataan ini dapat diubah menjadi salah satu bentuk pernyataan di bawah ini:

a) untuk setiap bilangan real *x*, jika $x \geq 0$ maka $x^2 \geq 0$.
b) kuadrat dari setiap bilangan real nonnegatif adalah bilangan real nonnegatif.
c) setiap bilangan real non-negatif memiliki kuadrat yang juga bilangan real non-negatif.
d) semua bilangan real nonnegatif memiliki kuadrat real dan nonnegatif

Pernyataan $\exists x \left[p(x) \Rightarrow q(x) \right]$ adalah pernyataan yang benar sedangkan per-nyataan berikut ini adalah pernyataan yang bernilai salah.

1′) $\forall x \left[q(x) \Rightarrow s(x) \right]$

Bukti bahwa pernyataan tersebut adalah pernyataan yang salah, dapat ditun-jukkan dengan memberikan satu *counterexample* – yaitu *satu nilai x* dimana pernyataan $q(x) \Rightarrow s(x)$ bernilai salah. Jadi tidak harus dibuktikan dengan meng-gunakan semua nilai *x* sebagaimana pada pernyataan 2). Dengan mengganti nilai *x* menjadi 1, maka diperoleh $q(1)$ merupakan pernyataan yang benar dan $s(1)$ adalah pernyataan yang salah. Oleh karena itu $q(1) \Rightarrow s(1)$

adalah pernyataan yang salah. Akibatnya pernyataan berkuantor $\forall x[q(x) \Rightarrow s(x)]$ adalah pernyataan yang salah. Perhatikan bahwa *x* = 1 bukan merupakan satu-satunya *counterexample* karena setiap bilangan real *a* antara $-\sqrt{3}$ dan $\sqrt{3}$ mengakibatkan $q(a)$ benar dan $s(a)$ salah.

2′) $\forall x[r(x) \vee s(x)]$

Banyak nilai yang memenuhi untuk *x*, antara lain 1, $\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$, dan 0, yang merupakan *counterexample*. Dengan mengubah kuantornya, akan diperoleh per-nyataan $\exists x[r(x) \vee s(x)]$ yang bernilai benar.

3′) $\forall x[r(x) \Rightarrow p(x)]$

Bilangan real -1 adalah salah satu penyelesaian dari persamaan $x^2 - 3x - 4 = 0$, sehingga $r(-1)$ adalah pernyataan yang benar, sedangkan $p(-1)$ adalah pernyataan salah. Oleh karena itu -1 menghasilkan *counterexample* unik yang menunjukkan bahwa pernyataan berkuantor ini adalah pernyataan yang ber-nilai salah. Pernyataan $(3')$ dapat dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut:

a) untuk setiap bilangan real *x*, jika $x^2 - 3x - 4 = 0$ maka $x \geq 0$.
b) untuk setiap bilangan real *x*, jika *x* adalah solusi dari $x^2 - 3x - 4 = 0$ maka $x \geq 0$.

Sekarang dimisalkan $p(x)$ adalah sebarang kalimat terbuka dengan variabel *x*, dan himpunan semesta yang tidak kosong. Jika $\forall x, p(x)$ benar, maka $\exists x, p(x)$ juga benar. Dengan kata lain, $\forall x, p(x) \Rightarrow \exists x, p(x)$. Pernyataan ini merupakan implikasi logis – karena $\exists x, p(x)$ bernilai benar jika $\forall x, p(x)$ benar. Diketahui juga bahwa hipotesis dari implikasi ini adalah pernyataan berkuantor $\forall x, p(x)$ dan kesimpulannya adalah $\exists x, p(x)$ yang juga merupakan pernyataan berkuantor. Sebaliknya, tidak selamanya berlaku bahwa jika $\exists x, p(x)$ benar, maka $\forall x, p(x)$ juga benar. Dalam hal ini $\exists x, p(x)$ tidak secara umum mengimplikasikan $\forall x, p(x)$.

Definisi 1.4. Misalkan $p(x), q(x)$ adalah pernyataan-kalimat terbuka yang ter-definisi pada suatu himpunan semesta tertentu. Kalimat terbuka $p(x)$ dan $q(x)$ disebut ekivalensi logis dan dituliskan $\forall x[p(x) \Rightarrow q(x)]$ apabila $p(a) \Leftrightarrow q(a)$ ber-nilai benar untuk setiap nilai *a* dari himpunan semesta. Jika $p(a) \Leftrightarrow q(a)$ benar untuk setiap *a* dalam himpunan semesta, maka $\forall x[p(x) \Rightarrow q(x)]$ dan dikatakan bahwa $p(x)$ secara logika berimplikasi $q(x)$.

Misalkan suatu himpunan semesta semua segitiga pada bidang datar, dan $\mathrm{p(x), q(x)}$ adalah kalimat terbuka:

$\mathrm{p(x)}$: *x* adalah segitiga sama kaki

$\mathrm{q(x)}$: *x* adalah segitiga sama sisi.

maka untuk semua segitiga *a* tertentu (*a* adalah sifat tertentu dari *x*), dapat diketahui bahwa $\mathrm{p(a) \Leftrightarrow q(a)}$ adalah pernyataan yang benar untuk semua segitiga dalam bidang datar tersebut. Dengan demikian, $\forall \mathrm{x}\left[\mathrm{p(x) \Leftrightarrow q(x)}\right]$. Perhatikan bahwa $\forall \mathrm{x}\left[\mathrm{p(x) \Leftrightarrow q(x)}\right]$ jika dan hanya jika $\forall \mathrm{x}\left[\mathrm{p(x) \Rightarrow q(x)}\right]$ dan $\forall \mathrm{x}\left[\mathrm{q(x) \Rightarrow p(x)}\right]$.

Definisi 1.5. Untuk suatu kalimat terbuka $\mathrm{p(x), q(x)}$ yang merupakan pernyataan berkuantor universal dan terdefinisi pada himpunan semesta tertentu, $\forall \mathrm{x}\left[\mathrm{p(x) \Rightarrow q(x)}\right]$, maka

1). Kontraposisi dari $\forall \mathrm{x}\left[\mathrm{p(x) \Rightarrow q(x)}\right]$ adalah $\forall \mathrm{x}\left[\sim \mathrm{q(x)} \Rightarrow \sim \mathrm{p(x)}\right]$

2). Konversi dari $\forall \mathrm{x}\left[\mathrm{p(x) \Rightarrow q(x)}\right]$ adalah $\forall \mathrm{x}\left[\mathrm{q(x) \Rightarrow p(x)}\right]$

3). Inversi dari $\forall \mathrm{x}\left[\mathrm{p(x) \Rightarrow q(x)}\right]$ adalah $\forall \mathrm{x}\left[\sim \mathrm{p(x)} \Rightarrow \sim \mathrm{q(x)}\right]$

Contoh 1.8. Untuk himpunan semesta persegi pada bidang datar, misalkan $\mathrm{s(x)}$ dan $\mathrm{e(x)}$ sebagai pernyataan-kalimat terbuka.

$\mathrm{s(x)}$: *x* adalah suatu bujursangkar.

$\mathrm{e(x)}$: *x* adalah persegi panjang.

a). Pernyataan $\forall \mathrm{x}\left[\mathrm{s(x) \Rightarrow e(x)}\right]$ merupakan suatu pernyataan yang benar dan ekivalen logis dengan kontraposisinya, yaitu $\forall \mathrm{x}\left[\sim \mathrm{e(x)} \Rightarrow \sim \mathrm{s(x)}\right]$ karena

$\left[\mathrm{s(a) \Rightarrow e(a)}\right] \Leftrightarrow \left[\sim \mathrm{e(a)} \Rightarrow \sim \mathrm{s(a)}\right]$ untuk setiap *a*. Karena itu,

$$\forall \mathrm{x}\left[\mathrm{s(x) \Rightarrow e(x)}\right] \Leftrightarrow \forall \mathrm{x}\left[\sim \mathrm{e(x)} \Rightarrow \sim \mathrm{s(x)}\right].$$

b). Pernyataan $\forall \mathrm{x}\left[\mathrm{e(x) \Rightarrow s(x)}\right]$ adalah pernyataan yang salah dan merupakan konversi dari pernyataan $\forall \mathrm{x}\left[\mathrm{s(x) \Rightarrow e(x)}\right]$. Pernyataan $\forall \mathrm{x}\left[\sim \mathrm{s(x)} \Rightarrow \sim \mathrm{e(x)}\right]$ merupakan inversi dari pernyataan tersebut, dan merupakan pernyataan yang salah. Karena $\left[\mathrm{e(a) \Rightarrow s(a)}\right] \Leftrightarrow \left[\sim \mathrm{s(a)} \Rightarrow \sim \mathrm{e(a)}\right]$ untuk setiap persegi *a* tertentu, maka dapat disimpulkan bahwa konversi dan inversi adalah ekivalen logis satu sama lain, yaitu

$$\forall \mathrm{x}\left[\mathrm{e(x) \Rightarrow s(x)}\right] \Leftrightarrow \left[\sim \mathrm{s(x)} \Rightarrow \sim \mathrm{e(x)}\right].$$

Contoh 1.9. Misalkan $p(x)$ adalah pernyataan "$x > 3$". Bagaimana nilai kebenaran dari pernyataan $p(4)$ dan $p(2)$?

Berdasarkan pernyataan $p(x)$, diperoleh $p(4)$ dengan mengganti variabel x menjadi 4. Dengan demikian, proposisi $p(4)$ yang menyatakan bahwa "$4 > 3$" adalah pernyataan yang benar. Sebaliknya, $p(2)$ yang menyatakan bahwa "$2 > 3$" adalah pernyataan yang salah.

Contoh 1.10. Misalkan $q(x, y)$ adalah proposisi yang berbentuk $x = y + 3$. Bagaimanakah nilai kebenaran untuk $q(1, 2)$ dan $q(3, 0)$?

Untuk menentukan $q(1, 2)$ maka variabel x diganti dengan 1, dan variabel y diganti dengan 2. Dengan demikian proposisi $x = y + 3$ berubah menjadi "$1 = 2 + 3$" yaitu $q(1, 2)$ adalah proposisi yang bernilai salah. Selanjutnya, jika x diganti dengan 3 dan y diganti dengan 0, maka proposisi $q(3, 0)$ adalah proposisi yang bernilai benar.

B.3. Negasi Kuantor

Kuantor universal merupakan negasi dari kuantor eksistensial. Sebaliknya, kuantor eksistensial merupakan negasi dari kuantor universal.

- $\sim[\forall x \in U, p(x)] \equiv \exists x \in U \ni \sim p(x)$
- $\sim[\exists x \in U \ni p(x)] \equiv \forall x \in U, \sim p(x)$

Aturan negasi suatu pernyataan yang mengandung satu kuantor:

$$\sim[\forall x, p(x)] \Leftrightarrow \exists x, \sim p(x)$$
$$\sim[\exists x, p(x)] \Leftrightarrow \forall x, \sim p(x)$$
$$\sim[\forall x, \sim p(x)] \Leftrightarrow \exists x, \sim(\sim p(x)) \Leftrightarrow \exists x, p(x)$$
$$\sim[\exists x, \sim p(x)] \Leftrightarrow \forall x, \sim(\sim p(x)) \Leftrightarrow \forall x, p(x)$$

Contoh 1.11.

(a). Negasi dari pernyataan: "Kuadrat dari **setiap** bilangan real adalah bilangan nonnegatif", adalah "**Ada** suatu bilangan real sedemikian sehingga kuadratnya **kurang dari nol**".

$$\sim\left[\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0\right] \equiv \exists x \in \mathbb{R} \ni x^2 < 0$$

(b). Negasi dari pernyataan "**Ada** bilangan bulat yang kuadratnya sama dengan 2", adalah "Kuadrat dari semua bilangan bulat **tidak** ada yang sama dengan 2".

$$\sim\left[\exists n \in \mathbb{Z} \ni n^2 = 2\right] \equiv \forall n \in \mathbb{Z}, n^2 \neq 2$$

Pernyataan yang diberikan pada contoh (a) adalah pernyataan yang benar, karena itu ingkarannya merupakan pernyataan yang salah. Sedangkan pernyataan yang diberikan pada contoh (b) merupakan pernyataan yang salah, karena itu negasinya merupakan pernyataan yang bernilai benar.

(c). Negasi dari pernyataan: “Hasilkali **sebarang** bilangan real dengan **sebarang** bilangan bulat adalah bilangan real”, adalah “**Ada** bilangan real yang jika dikalikan dengan sebarang bilangan bulat **tidak** menghasilkan bilangan real”, atau “**Ada** bilangan real yang jika dikalikan dengan bilangan bulat **tertentu**, **tidak** menghasilkan bilangan real”.

$$\begin{aligned} \sim\left[\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z} \ni nx \in \mathbb{R}\right] &\equiv \exists x \in \mathbb{R} \ni \sim\left[\forall n \in \mathbb{Z}, nx \in \mathbb{R}\right] \\ &\equiv \exists x \in \mathbb{R} \ni \exists n \in \mathbb{Z} \ni nx \notin \mathbb{R} \\ &\equiv \exists x \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{Z} \ni nx \notin \mathbb{R} \end{aligned}$$

(d). $$\begin{aligned} \sim\left[\forall x \in \mathbb{R}^+, \exists y \in \mathbb{R}^+ \ni y^2 = x\right] &\equiv \exists x \in \mathbb{R}^+ \ni \sim\left[\exists y \in \mathbb{R}^+ \ni y^2 = x\right] \\ &\equiv \exists x \in \mathbb{R}^+ \ni \forall y \in \mathbb{R}^+, y^2 \neq x \end{aligned}$$

(e). $$\begin{aligned} \sim\left[\exists n \in \mathbb{Z}^+ \ni \forall m \in \mathbb{Z}, m^n > 0\right] &\equiv \forall n \in \mathbb{Z}^+, \sim\left[\forall m \in \mathbb{Z}, m^n > 0\right] \\ &\equiv \forall n \in \mathbb{Z}^+, \exists m \in \mathbb{Z} \ni m^n \leq 0 \end{aligned}$$

C. Metode Pembuktian Dalam Matematika

C.1. Pembuktian Langsung

Pada pembuktian langsung, hal-hal yang diketahui tentang teorema diturunkan secara langsung dengan teknik tertentu sehingga dapat ditarik kesimpulan dengan benar.

Contoh 1.12.

1. Buktikan bahwa 2 merupakan salah satu akar persamaan $x^2 + 2x - 8 = 0$
2. Buktikan bahwa semua bilangan genap $n \in [3, 31]$ dapat dinyatakan sebagai jumlahan dari 2 bilangan prima.
3. Buktikan, untuk sembarang bilangan riil *x*, jika $|x| > 3 \Rightarrow x^2 > 9$

C.2. Pembuktian Tak Langsung

Dengan metode pembuktian tak langsung, fakta-fakta tidak digunakan secara langsung untuk menarik suatu kesimpulan. Metode pembuktian tak langsung antara lain **kontradiksi** dan **kontraposisi**.

a. Kontradiksi

Kontradiksi adalah suatu pernyataan yang selalu salah, apapun nilai kebenaran dari proposisi-proposisinya. Pembuktian proposisi *p* dilakukan dengan menentukan ingkaran dari ingkarannya sehingga diperoleh $\sim(\sim p) \equiv p$. Langkah-langkah pembuktian kontradiksi adalah sebagai berikut:

- Tentukan ingkaran dari pernyataan yang akan dibuktikan
- Bukti bahwa suatu pernyataan adalah benar, dapat diketahui dengan membuktikan bahwa ingkarannya bernilai salah.

Sebagai latihan, mahasiswa dapat membuktikan proposisi-proposisi berikut ini dengan kontradiksi.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \le \cos^2 x \le 1$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = 2 \vee x = 3$
4. Untuk setiap himpunan P dan Q, $P \cup Q = P \Rightarrow Q \subset P$
5. $\forall a, b \in \mathbb{R}, a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$
6. $\forall a, b \in \mathbb{R}, \wedge b \neq 0, \dfrac{a}{b} > 0 \Rightarrow a \cdot b = 0$
7. Jika x habis dibagi 6 maka x habis dibagi 2.
8. Jika x^2 bilangan genap $\Rightarrow$ x bilangan genap.

b. Kontraposisi

- Pembuktian bahwa $p \Rightarrow q$ adalah proposisi yang benar dapat dilakukan dengan menunjukkan bahwa **kontraposisi** $\sim q \Rightarrow \sim p$ adalah proposisi yang benar karena jika kontraposisinya benar maka implikasinya juga benar, $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$.

Contoh 1.13. Buktikan proposisi berikut ini:

1. Jika x^2 bilangan genap, maka x bilangan genap.

   Bukti.

   Misalkan $x \quad = 2m + 1$ ganjil $(\sim q)$ maka $x^2 = 4m^2 + 4m + 1$

   $\qquad\qquad\quad = 2(2m^2 + 2m) + 1$ adalah ganjil ($\sim p$).
2. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 4 > 0 \Rightarrow x < -2 \vee x > 2$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = -2 \vee x = 3$
4. $\forall a, b \in \mathbb{R}, a.b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$
5. $\forall x \in \mathbb{R}, (x-2)(x-5) < 0 \Rightarrow 2 < x < 5$
6. $\forall x \in \mathbb{R}, \wedge x \neq 5, \dfrac{(x-2)}{(x-5)} < 0 \Rightarrow 2 < x < 5$

C.3. Induksi Matematika

Induksi matematika merupakan salah satu metode pembuktian tidak langsung, yang dilakukan dengan menggunakan setidak-tidaknya dua proposisi. Proposisi pertama adalah basis induksi, proposisi kedua adalah hipotesis induksi. Langkah-langkah induksi matematika adalah sebagai berikut:

1) Langkah Basis

   Sebagai basis, diambil $n = 1$ dan harus dibuktikan P(1) benar, karena akan dibuktikan kebenarannya pernyataan P(n) untuk $n > 1$

2) Hipotesis Induksi

   Anggap bahwa untuk $n = k$, P(k) adalah proposisi yang benar.

3) Langkah Induksi

   Ambil $n = k$, jika P(k) benar, maka P($k + 1$) benar.

Induksi Matematika akan diuraikan lebih lanjut pada bagian kahir dalam bab ini.

Definisi 1.6. Negasi atau ingkaran dari proposisi *p* yang dinyatakan dengan $\sim p$ atau $\neg p$ adalah proposisi "bukan *p*" atau "tidak *p*". Proposisi $\sim p$ bernilai benar jika proposisi *p* bernilai salah.

Definisi 1.7. Konjungsi dari dua proposisi *p* dan *q* yang dilambangkan $p \wedge q$ adalah proposisi *p* dan *q*, yang bernilai benar jika proposisi *p* dan *q* kedua-duanya bernilai benar.

Definisi 1.8. Disjungsi dari dua proposisi yang dilambangkan $p \vee q$ adalah proposisi *p* atau *q*, yang bernilai benar jika salah satu dari proposisi *p* atau *q* bernilai benar.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
B	B	B	B
B	S	S	B
S	B	S	B
S	S	S	B

Definisi 1.9. Tautologi adalah proposisi yang nilai kebenarannya selalu benar.

Definisi 1.10. Kontradiksi adalah proposisi yang nilai kebenarannya selalu salah.

Definisi 1.11. Dua proposisi dikatakan **ekivalen** jika dan hanya jika kedua proposisi tersebut memiliki nilai tabel kebenaran yang sama.

Teorema 1.1. Jika *p, q,* dan *r*, adalah proposisi-proposisi, maka berlaku:

(a).	$p \equiv \sim(\sim p)$	Hukum negasi ganda
(b).	$\left.\begin{array}{l} p \vee q \equiv q \vee p \\ p \wedge q \equiv q \wedge p \end{array}\right\}$	Hukum komutatif
(c).	$\left.\begin{array}{l} p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r \\ p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r \end{array}\right\}$	Hukum Assosiatif
(d).	$\left.\begin{array}{l} p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \end{array}\right\}$	Hukum Distributif
(e).	$\left.\begin{array}{l} \sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q \\ \sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q \end{array}\right\}$	Hukum DeMorgan

Definisi 1.12. Untuk proposisi *p* dan *q*, kalimat bersyarat $q \Rightarrow p$ adalah proposisi "jika *p* maka *q*". Proposisi *p* disebut **anteseden** sedangkan proposisi *q* disebut **konsekuen**. Kalimat bersyarat $q \Rightarrow p$ bernilai benar jika dan hanya jika *p* bernilai salah atau *q* bernilai benar.

Definisi 1.13. Misalkan *p* dan *q* adalah proposisi-proposisi tertentu, maka:

Konversi (balikan) dari $p \Rightarrow q$ adalah $q \Rightarrow p$

Kontrapositif (kontraposisi) dari $p \Rightarrow q$ adalah $\sim q \Rightarrow \sim p$

Teorema 1.2. Untuk proposisi-proposisi *p* dan *q* berlaku:

(a) $p \Rightarrow q$ ekivalen dengan kontraposisinya, yaitu $\sim q \Rightarrow \sim p$

(b) $p \Rightarrow q$ tidak ekivalen dengan konversinya, yaitu $q \Rightarrow p$

Bukti. Pembuktian Teorema 1.2. dapat dilihat melalui tabel kebenaran berikut ini.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
B	B	S	S	B	S	B
B	S	S	B	S	S	B
S	B	B	S	B	S	B
S	S	B	B	B	B	B

Definisi 1.14. Untuk proposisi-proposisi *p* dan *q*, kalimat bikondisional $p \Leftrightarrow q$ adalah proposisi "*p* jika dan hanya jika *q*". Bentuk proposisi $p \Leftrightarrow q$ bernilai benar hanya jika proposisi *p* dan *q* kedua-duanya memiliki nilai kebenaran yang sama.

Teorema 1.3. Untuk proposisi-proposisi p, q, dan r, berlaku:

(a). $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

(b). $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

(c). $\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

(d). $\sim (p \wedge q) \equiv p \Rightarrow \sim q \equiv q \Rightarrow \sim p$

(e). $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$

(f). $p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$

(g). $(p \vee q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$

Pembuktian Teorema 1.3 dapat dilakukan secara langsung dengan menggunakan tabel kebenaran. Meskipun demikian, mahasiswa juga harus memahami makna dari ekivalensi ruas kiri dan kanan pada masing-masing pernyataan tersebut. Penjelasan untuk teorema 1.3 (a) adalah sebagai berikut: diketahui bahwa implikasi $p \Rightarrow q$ bernilai salah jika p bernilai benar dan q bernilai salah. Hal ini akan terjadi jika $\sim p$ dan q bernilai salah. Karena hal ini terjadi jika $\sim p$ dan q bernilai salah, maka tabel kebenaran untuk $p \Rightarrow q$ dan $\sim p \vee q$ adalah ekivalen.

Teorema 1.1. dan Teorema 1.3. memiliki banyak keterkaitan. Setelah mahasiswa membuktikan Teorema 1.1(a) dan 1.3(a), maka Teorema 1.3 (c) dapat dibuktikan sebagai berikut:

Berdasarkan Teorema 1.3 (a), dapat diketahui bahwa $\sim (p \Rightarrow q) \equiv \sim (\sim p \vee q)$, dan bahwa $\sim (\sim p \vee q) \equiv \sim (\sim p) \wedge \sim q$ menurut Teorema 1.1(e). Selanjutnya menurut Teorema 1.1(a), $\sim (\sim p) \wedge \sim q \equiv p \wedge \sim q$ jadi terbukti bahwa $\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$.

Kemampuan membaca struktur kalimat dan menterjemahkannya menjadi bentuk simbolis dengan menggunakan hubungan-hubungan logika akan sangat membantu untuk menentukan nilai kebenaran kalimat tersebut. Terjemahan kalimat-kalimat menjadi simbol-simbol proposisional seringkali sangat kompleks. Makna ganda yang seringkali ditoleransi dalam bahasa sehari-hari dapat menghilangkan struktur dan kebermaknaannya jika diberlakukan juga di dalam matematika. Misalkan seorang dosen memberi penguatan kepada mahasiswa dengan kata-kata: "*jika kamu mendapatkan skor 75 atau lebih pada test berikutnya, maka kamu akan lulus kuliah ini*". Kalimat ini secara eksplisit merupakan kalimat implikatif, tetapi sebagian orang akan memaknainya sebagai suatu kalimat biimplikatif karena mungkin ada siswa yang bisa lulus kuliah tersebut meskipun skornya tidak mencapai 75. Pernyataan seperti ini tidak sama dengan situasi di dalam matematika, misalnya jika

$x = 2$ maka x merupakan akar dari persamaan $x^2 = 2x$ yang hanya memiliki makna implikatif $\Rightarrow$, karena $x^2 = 2x$ tidak harus mengimplikasikan $x = 2$.

D. Penarikan Kesimpulan

Misalkan suatu hari ini, Anda baru menyadari bahwa telepon seluler Anda hilang. Setelah mengingat-ingat, ada beberapa fakta yang Anda pastikan kebenarannya:

- Jika telepon selulerku ada di meja dapur, maka aku pasti sudah melihatnya ketika sarapan pagi.
- Saya menelpon paman tadi pagi ketika saya berada di kamar atau di depan rumah.
- Jika saya menelepon paman ketika berada di kamar, maka pastilah telepon selulerku tertinggal di meja belajar.
- Jika aku menelepon paman ketika berada di depan rumah, maka telepon selulerku tertinggal di meja teras.
- Aku tidak melihat telepon selulerku pada waktu sarapan pagi.

Misalkan:

- P : Telepon selulerku ada di meja dapur
- Q : Saya melihat telepon selulerku ketika sarapan pagi
- R : Saya menelepon paman di kamar
- S : Telepon selulerku tertinggal di meja belajar
- T : Saya menelepon paman di depan rumah
- U : Telepon selulerku tertinggal di meja teras

Dengan menggunakan simbol-simbol tersebut di atas, maka dapat dituliskan:

- $P \Rightarrow Q$
- $R \Rightarrow S$
- $R \vee S$
- $T \Rightarrow U$

Kesimpulan yang harus diambil mengenai keberadaan telepon seluler tersebut di atas, dapat diketahui berdasarkan cara yang logis menurut matemtika. Ada tiga metode yang digunakan dalam penarikan kesimpulan yaitu *Modus Ponens, Modus Tollens* dan *Silogisme*. Kesimpulan atau konklusi ditarik dari beberapa pernyataan yang diasumsikan benar. Asumsi-asumsi tersebut dinamakan **premis**.

Bukti Langsung untuk $p \Rightarrow q$

Bukti.

Asumsikan p

$\vdots$

Karena itu, q

Jadi, $p \Rightarrow q$

Contoh 1.14: Misalkan x adalah bilangan bulat. Buktikan bahwa jika x ganjil, maka $x + 1$ adalah bilangan genap.

Bukti.

Bentuk dari teorema di atas adalah $p \Rightarrow q$ *dengan pernyataan p adalah "x adalah bilangan ganjil" dan q adalah "x* + 1 *adalah bilangan genap"*. **Misalkan *x* adalah bilangan bulat** (x dapat diasumsikan sebagai bilangan bulat, karena telah disebutkan dalam soal.) **Andaikan *x* adalah bilangan ganjil** (asumsi ini dipilih sebagai salah satu kemungkinan bahwa anteseden p bernilai benar. Akan dibuktikan q). Berdasarkan definisi, bilangan ganjil $x = 2k + 1$ untuk suatu bilangan bulat k. (deduksi ini menggantikan pernyataan P dengan suatu pernyataan yang ekivalen, yaitu definisi bilangan ganjil. Selanjutnya $x + 1 = (2k +1) + 1$ untuk suatu bilangan bulat k. Karena $(2k + 1) + 1 = 2k + 2 = 2(k + 1)$ adalah bilangan genap, yaitu bilangan bulat kelipatan dua, maka $x + 1$ adalah bilangan genap. Oleh karena itu disimpulkan bahwa jika x adalah bilangan ganjil, maka $x + 1$ adalah bilangan genap.

Contoh 1.15: Misalkan a, b, dan c adalah bilangan-bilangan bulat. Buktikan bahwa jika $a \mid b$ dan $b \mid c$, maka $a \mid c$.

Bukti.

Misalkan a, b, dan c adalah bilangan-bilangan bulat (diasumsikan bahwa hipotesis yang diberikan di dalam soal merupakan pernyataan yang benar). Selanjutnya diandaikan bahwa $a \mid b$ dan $b \mid c$ (anteseden merupakan pernyataan majemuk: a membagi b dan b membagi c) sehingga b = ak untuk suatu bilangan bulat k, dan c = bm untuk suatu bilangan bulat m. Karena c = bm = (ak)m = a(km) maka disimpulkan bahwa $a \mid c$. Jadi, jika $a \mid b$ dan $b \mid c$, maka $a \mid c$.

Contoh 1.16. Misalkan *a, b,* dan *c* adalah bilangan-bilangan bulat. Buktikan bahwa jika $a \mid b$ dan $a \mid c$, maka $a \mid (b-c)$.

Bukti.

Misalkan *a, b,* dan *c* adalah bilangan-bilangan bulat, dimana $a \mid b$ dan $a \mid c$. Dengan demikian $b = ak$ untuk suatu bilangan bulat *k* dan $c = al$ untuk suatu bilangan bulat *l.* Jadi, $b - c = ak - al = a(k - l)$. Karena $k - l$ merupakan bilangan bulat, maka $a \mid (b-c)$.

Contoh 1.17. Misalkan *a* dan *b* adalah bilangan-bilangan real positif. Buktikan bahwa jika $a < b$, maka $b^2 - a^2 > 0$.

Bukti.

Diketahui bahwa $b^2 - a^2 = (b - a)(b + a) > 0$. Ketidaksamaan ini bernilai benar jika $(b - a) > 0$ dan $(b + a) > 0$. Ketidaksamaan $b - a > 0$ adalah pernyataan yang benar karena $b - a > 0 \equiv b > a$ yang telah disebutkan pada anteseden. Ketidaksamaan kedua juga benar karena diketahui dari soal bahwa *a* dan *b* adalah bilangan-bilangan real positif, akibatnya $b + a > 0$. Karena $b - a > 0$ dan $b + a > 0$ maka $b^2 - a^2 = (b - a)(b + a) > 0$.

D.1. Pembuktian Dengan Kontraposisi Untuk $p \Rightarrow q$

Asumsikan $\sim q$

$\vdots$

Karena itu, $\sim p$.

Jadi, $\sim q \Rightarrow \sim p$

Kesimpulan : $p \Rightarrow q$

Contoh 1.18. Misalkan *m* adalah suatu bilangan bulat. Buktikan bahwa jika m^2 bilangan genap, maka *m* juga bilangan genap.

Bukti. *Anteseden dalam soal ini adalah p, yaitu "m^2 bilangan genap" dan konsekuennya adalah q, yaitu "m bilangan genap".* Andaikan bahwa bilangan bulat *m* bilangan ganjil (andaikan $\sim q$.). Karena *m* ganjil maka $m = 2k + 1$ untuk suatu bilangan bulat *k*. Selanjutnya, $m^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ adalah bilangan ganjil. Jadi kontraposisi yang menyatakan bahwa jika *m* bilangan ganjil, maka m^2 juga bilangan ganjil, membuktikan bahwa jika m^2 genap maka *m* juga genap.

D.2. Pembuktian Dengan Kontradiksi Untuk $p \Rightarrow q$

Pada khasus tertentu, pembuktian dengan menggunakan kontradiksi akan lebih mudah dari pada pembuktian dengan cara langsung. Pembuktian dengan kontradiksi dapat digambarkan sebagai berikut:

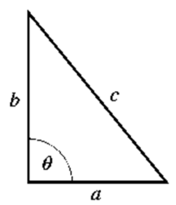
Andaikan $\sim p$
$\vdots$
Akibatnya q
$\vdots$
Maka $\sim q$
Karena $q \wedge \sim q$ kontradiksi, maka disimpulan p.

Contoh 1.19. Buktikan bahwa $\sqrt{2}$ adalah bilangan irrasional.
Bukti.

Asumsikan bahwa $\sqrt{2}$ adalah bilangan rasional (asumsikan $\sim p$). Dengan demikian $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ untuk suatu bilangan bulat *a* dan *b*, dengan *b* ≠ 0, dan *a* dan *b* tidak memiliki faktor persekutuan (*pernyataan q adalah "a dan b tidak memiliki faktor persekutuan*). Dari $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ diperoleh $2 = \frac{a^2}{b^2}$ berarti $2b^2 = a^2$. Dalam hal ini karena a^2 adalah bilangan genap maka *a* juga bilangan genap. Dengan kata lain, terdapat bilangan bulat *k* sedemikian sehingga $a = 2k$. Oleh karena itu, $2b^2 = a^2 = (2k)^2 = 4k^2$. Jadi $b^2 = 2k^2$ yang menunjukkan bahwa b^2 adalah bilangan genap. Selanjutnya, karena *a* dan *b* merupakan bilangan genap maka kedua bilangan tersebut memiliki faktor persekutuan yang sama, yaitu 2 (ternyata $\sim q$). Hal ini merupakan suatu kontradiksi, jadi disimpulkan bahwa $\sqrt{2}$ adalah bilangan irrasional.

D.3. Pembuktian Dua Tahap Untuk $p \Leftrightarrow q$

(i) Tunjukkan bahwa $p \Rightarrow q$
(ii) Tunjukkan bahwa $q \Rightarrow p$
Karena itu, $p \Leftrightarrow q$



Contoh 1.20. Panjang sisi-sisi segitiga di samping ini adalah *a, b,* dan *c*. Gunakan hukum kosinus untuk membuktikan bahwa segitiga tersebut adalah segitiga siku-siku dengan sisi hipotenusa *c* jika dan hanya jika $a^2 + b^2 = c^2$.

Bukti.

Menurut hukum kosinus, $a^2 + b^2 = c^2 - 2ab\cos\theta$, dengan θ adalah sudut antara sisi-sisi *a* dan *b*. Jadi,

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 = c^2 &\Leftrightarrow 2ab\cos\theta = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos\theta = 0 \\ &\Leftrightarrow \theta = 90^0 \end{aligned}$$

Kesimpulan: $a^2 + b^2 = c^2$ jika dan hanya jika segitiga tersebut siku-siku dengan sisi *c* sebagai hipotenusa.

Contoh 1.21. Dengan pembuktian langsung, pembuktian dengan kontraposisi, dan pembuktian dengan kontradiksi, buktikanlah pernyataan: Jika *x* dan *y* adalah bilangan ganjil, maka *xy* adalah juga bilangan ganjil, *x* dan *y* dari bilangan bulat.

Bukti langsung:

Asumsikan *x* dan *y* adalah bilangan ganjil. Dengan demikian terdapat bilangan bulat *m* dan *n* sedemikian sehingga $x = 2m + 1$ dan $y = 2n + 1$. Jadi hasil perkalian

$$\begin{aligned} xy &= (2m+1)(2n+1) = 4mn + 2m + 2n + 1 \\ &= 2(2mn + m + n) + 1 \\ &= 2p + 1, \text{ dengan } p = 2mn + m + n \end{aligned}$$

adalah bilangan ganjil.

Bukti dengan kontraposisi:

Kontraposisi dari pernyataan: *Jika x adalah bilangan ganjil dan y adalah bilangan ganjil maka xy adalah bilangan ganjil,* adalah pernyataan: *Jika xy genap maka x adalah bilangan genap dan y adalah bilangan genap.* Asumsikan *xy* adalah bilangan genap sehingga

2 merupakan faktor persekutuan dari x dan y. Tetapi karena 2 adalah bilangan prima dan 2 dapat membagi hasilkali xy, maka menurut Lemma Euclid, 2 membagi x atau 2 membagi y. Selanjutnya jika xy adalah bilangan genap, maka x adalah bilangan genap atau y adalah bilangan genap. Jadi jika x adalah bilangan ganjil dan y adalah bilangan ganjil maka xy adalah bilangan ganjil.

Bukti dengan kontradiksi

Misalkan pernyataan "jika x dan y adalah bilangan ganjil, maka xy adalah bilangan ganjil" merupakan pernyataan yang salah. Jadi ingkarannya adalah x dan y ganjil, dan xy genap. Karena xy genap maka 2 membagi xy. Menurut Lemma Euclid, 2 membagi atau 2 membagi y. Hail ini berarti salah satu dari x atau y adalah bilangan genap. Tetapi menurut soal, x ganjil dan y ganjil. Pernyataan ini kontradiksi. Jadi disimpulkan bahwa jika x ganjil dan y ganjil, maka xy adalah bilangan ganjil.

D.4. Modus Ponen, Modus Tollens, Silogisme

Bentuk Umum:

$$\begin{array}{ll} \text{Premis 1} & \cdots\cdots\cdots \\ \text{Premis 2} & \cdots\cdots\cdots \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ \hline \text{Kesimpulan} & \therefore \cdots\cdots\cdots \end{array}$$

Aturan Inferensial	Tautologi	Nama
$\begin{array}{l} p \\ \underline{p \Rightarrow q} \\ \therefore q \end{array}$	$(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$	Modus ponens
$\begin{array}{l} \neg q \\ \underline{p \Rightarrow q} \\ \therefore \neg p \end{array}$	$(\neg q \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow \neg p$	Modus tollens
$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \underline{q \Rightarrow r} \\ \therefore p \Rightarrow q \end{array}$	$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$	Silogisme hipotetis
$\begin{array}{l} p \vee q \\ \underline{\neg p} \\ \therefore q \end{array}$	$((p \vee q) \wedge \neg p) \Rightarrow q$	Silogisme disjungtif

p $\therefore p \vee q$	$p \Rightarrow (p \vee q)$	Penambahan
$p \wedge q$ $\therefore p$	$(p \wedge q) \Rightarrow p$	Penyederhanaan
p q $\therefore p \wedge q$	$((p) \wedge (q)) \Rightarrow (p \wedge q)$	Konjungsi
$p \vee q$ $\neg p \vee r$ $\therefore q \vee r$	$((p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)) \Rightarrow (q \vee r)$	Resolusi

a. Modus Ponen

Modus Ponen adalah suatu metode penarikan kesimpulan dengan prosedur sebagai berikut:

Jika $p \Rightarrow q$ benar dan p benar, maka q benar

Kalimat tersebut dapat dinayatakan dalam bentuk $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$. Tabel kebenaran untuk pernyataan tersebut merupakan suatu Tautologi, sehingga diperoleh kesimpulan yang benar.

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Premis 1} & p \Rightarrow q & \text{(Benar)} \\ \text{Premis 2} & p & \text{(Benar)} \\ \hline \text{Kesimpulan} & \therefore q & \text{(Benar)} \end{array}\right\} \text{atau } ((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$$

Tabel Kebenaran

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$
B	B	B	B	B
B	S	S	S	B
S	B	B	S	B
S	S	B	S	B

Contoh 1.22.

1. Isilah titik-titik di bawah ini, agar diperoleh penarikan kesimpulan yang benar.

a) $q \Rightarrow \neg p$
 …………
 $\therefore \neg p$

b). $\neg p \Rightarrow \neg q$
 $\neg p$
 $\therefore$ ………

c). $\cdots \Rightarrow \neg p$
 q
 $\therefore \neg p$

2. Manakah penarikan kesimpulan yang benar?

   a) Jika Linus membaca koran, maka Linus tahun ada lowongan kerja
      Linus tidak tahu ada lowongan kerja
      ∴ Linus tahu ada lowongan kerja

   b) Jika Yahya mendapat pekerjaan, maka Yahya akan menyumbang
      Yahya tidak mendapat pekerjaan
      ∴ Yahya menyumbang

   c) Jika Johan sarjana teknik maka Johan lulusan fakultas teknik
      Johan lulusan fakultas teknik
      ∴ Johan bukan sarjana teknik

a. Modus Tollens

Modus Tollens adalah suatu cara penarikan kesimpulan berdasarkan: "jika p $\Rightarrow$ q benar dan $\sim q$ benar, maka $\sim p$ benar".

$$\left.\begin{array}{l}\text{Premis 1:} p \Rightarrow q \\ \underline{\text{Premis 2:} \sim q} \\ \text{Kesimpulan:} \sim p\end{array}\right\} \text{atau } ((p \Rightarrow q) \wedge \sim q) \Rightarrow \sim p$$

Tabel Kebenaran

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$((p \Rightarrow q) \wedge \sim q)$	$((p \Rightarrow q) \wedge \sim q) \Rightarrow \sim p$
B	B	S	S	B	S	B
B	S	S	B	S	S	B
S	B	B	S	B	S	B
S	S	B	B	B	B	B

Contoh 1.23.

1. Buktikan bahwa Modus Tollens merupakan cara penarikan kesimpulan yang benar
2. Isilah titik-titik di bawah ini, agar diperoleh penarikan kesimpulan yang benar

   a). $\neg p \Rightarrow \neg q$
       …………
       $\therefore$ p

   b). $\neg p \Rightarrow q$
       $\neg q$
       $\therefore$ ……

   c). …… $\Rightarrow$ p
       $\neg p$
       $\therefore$ q

   d) Jika Harun mempunyai uang, maka ia membeli laptop baru
      ……………………………………………………………………
      ∴ Harun tidak mempunyai uang

3. Manakah penarikan kesimpulan yang sah?
   a. Jika Aldi seorang pelukis maka ia suka menggambar
      Aldi tidak suka menggambar
      $\therefore$ Aldi bukan seorang pelukis

   b. Jika hujan turun maka tanaman segar
      Tanaman layu
      $\therefore$ Hujan tidak turun

b. Silogisme

Silogisme adalah suatu cara penarikan kesimpulan berdasarkan: "jika $p \Rightarrow q$ benar dan $q \Rightarrow r$ benar, maka $p \Rightarrow r$ benar"

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Premis 1:} & p \Rightarrow q \\ \text{Premis 2:} & \underline{q \Rightarrow r} \\ \text{Kesimpulan:} & p \Rightarrow r \end{array}\right\} \text{atau } ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

Contoh 1.24.

1. Buktikan bahwa Silogisme merupakan cara penarikan kesimpulan yang benar.
2. Isilah titik-titik di bawah ini, agar diperoleh penarikan kesimpulan yang benar

   a). $\begin{array}{l} p \Rightarrow \neg q \\ \underline{\cdots \Rightarrow \neg r} \\ \therefore \cdots \Rightarrow \cdots \end{array}$ b). $\begin{array}{l} \cdots \Rightarrow \neg p \\ \underline{\cdots \Rightarrow \neg r} \\ \therefore \neg q \Rightarrow \cdots \end{array}$ c). $\begin{array}{l} r \Rightarrow \cdots \\ \underline{\neg q \Rightarrow \cdots} \\ \therefore \cdots \Rightarrow \neg p \end{array}$

   d). Jika p bilangan nyata maka $p^2 \geq 0$
   ………………..
   $\therefore$ Jika p bilangan nyata maka $(p^2 + 2) > 0$

3. Manakah penarikan kesimpulan yang sah ?
   a. Jika Tikno lulus maka Ibunya bahagia
      Jika Ibunya bahagia maka ia tidak memotong sapi
      $\therefore$ Jika Tikno lulus maka Ibunya memotong sapi

   b. Jika Surya pengacara maka ia sarjana hukum
      Jika Surya sarjana hukum maka ia kaya
      $\therefore$ Jika Surya pengacara maka ia kaya

c. Silogisme Disjungsi

Apabila kita dihadapkan dengan 2 pilihan (A atau B), sedangkan kita tidak memilih A, maka satu-satunya pilihan yang mungkin adalah memilih B.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Premis 1:} p \vee q \\ \underline{\text{Premis 2:} \sim p} \\ \text{Kesimpulan:} q\end{array}} \quad \text{atau} \quad \boxed{\begin{array}{l}\text{Premis 1:} p \vee q \\ \underline{\text{Premis 2:} \sim q} \\ \text{Kesimpulan:} p\end{array}}$$

Contoh 1.25.

1. Malam ini Agus makan di rumah atau di restoran
   Malam ini Agus tidak makan di rumah

   $\therefore$ Malam ini Agus makan di restoran
2. Ponselku ada di dalam kopor atau tertinggal di kamar
   Ponselku tidak tertinggal di kamar

   $\therefore$ Ponselku ada di dalam kopor

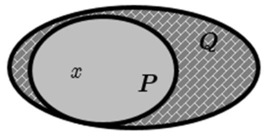
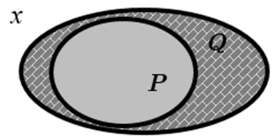
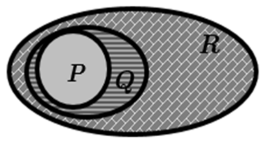
Ekivalensi Logis: Hukum-Hukum Logika

Di dalam semua cabang matematika, kita selalu ingin mengetahui bagaimana suatu entitas (keberadaan) yang dipelajari dikatakan sama, atau pada hakekatnya sama. Sebagai contoh di dalam Aljabar dan Aritmetika, telah diketahui bahwa dua bilangan real bukan nol, dikatakan sama jika kedua bilangan tersebut memiliki tanda yang sama dan nilai yang sama. Oleh karena itu untuk dua bilangan real yang tak nol $x, y,$ jika $|x| = |y|$ dan $xy > 0$, maka $x = y$. Demikian pula sebaliknya, jika $x = y$ maka $|x| = |y|$ dan $xy > 0$.

E. Induksi Matematika

Matematika mempunyai perbedaan mendasar dengan ilmu-ilmu yang lainnya. Matematika disusun atas sekumpulan aksioma dan definisi, dimana semua teorema didasarkan. Semua teorema dapat diturunkan atau dibuktikan dengan menggunakan aksioma dan definisi, atau menggunakan teorema-teorema yang telah dibuktikan sebelumnya. Sebaliknya teori-teori yang dijumpai pada sebagian besar ilmu lain misalnya tentang Hukum-Hukum Newton di dalam Ilmu Fisika, seringkali dibangun berdasarkan hasil-hasil eksperimen yang tidak dapat dibuktikan kebenarannya.

d. Hubungan Modus Ponens, Modus Tollens, dan Silogisme dengan Himpunan

Penarikan Kesimpulan	Himpunan	Diagram Venn
Modus Ponens $p \Rightarrow q$ $\underline{p \quad\quad}$ $\therefore q$	$P \subseteq Q$ $\underline{x \in P}$ $\therefore x \in Q$	
Modus Tollens $p \Rightarrow q$ $\underline{\neg q \quad\quad}$ $\therefore \neg p$	$P \subseteq Q$ $\underline{x \notin Q}$ $\therefore x \notin P$	
Silogisme $p \Rightarrow q$ $\underline{q \Rightarrow r}$ $\therefore p \Rightarrow r$	$P \subseteq Q$ $\underline{Q \subseteq R}$ $\therefore P \subseteq R$	

Oleh karena itu, tidak cukup berargumentasi bahwa suatu pernyataan matematis adalah benar hanya dengan eksperimen-eksperimen dan observasi-observasi. Fermat (1601-1665) menyebutkan suatu konjektur bahwa jika *n* adalah sebarang bilangan bulat yang lebih besar dari 2, maka persamaan $x^n + y^n = z^n$ tidak memiliki penyelesaian berbentuk bilangan bulat positif. Konjektur Fermat ini tidak dapat disimpulkan kebenarannya tanpa pembuktian yang valid. Faktanya, para ahli matematika memerlukan waktu lebih dari tiga abad untuk mencari bukti tersebut, yang akhirnya diselesaikan oleh seorang ahli matematika berkebangsaan Inggris, Andrew Wiles pada tahun 1994.

Menurut Bussey dalam artikelnya pada tahun 1917, Blaise Pascal (1623-1662) mengenal seorang berkebangsaan Italia yang bernama D. Franciscus Maurolycus (1494-1575) telah menggunakan induksi matematika dalam bukunya yang diterbitkan pada tahun 1575. Di dalam buku tersebut, Maurolycus membuktikan dengan cara induksi bahwa bilangan-bilangan ganjil terbentuk dengan cara berturut-turut menambahkan 2 terhadap bilangan ganjil pertama, yaitu 1. Maurolycus juga membuktikan dengan induksi bahwa jumlah *n* bilangan ganjil pertama adalah n^2. Meskipun demikian, Pascal maupun Maurolycus tidak pernah menggunakan istilah *induksi* untuk pembuktian yang dilakukan seperti saat ini. Instilah induksi pertama kali digunakan oleh John Wallis pada tahun 1956 dalam kata-kata *per modum inductionis* dalam buku *Arithmetica Infinitorum.* Selanjutnya, istilah *induksi* *matematika* diperkenalkan oleh Augustus de Morgan (1806-1871) melalui artikel *induction* yang ditulisnya pada tahun 1838 untuk jurnal *Penny Cyclopedia*.

Pada tahun 1889, Giuseppe Peano (1858-1932) menyusun lima aksioma yang menyajikan definisi lengkap tentang bilangan asli. Kelima aksioma tersebut adalah:

(i) 1 adalah bilangan asli.

(ii) Setiap bilangan asli memiliki satu turutan yang unik. Bilangan turutan tersebut juga merupakan bilangan asli.

(iii) Tidak ada dua bilangan asli yang memiliki bilangan turutan yang sama,

(iv) 1 tidak merupakan turutan dari sebarang bilangan asli

(v) Jika suatu sifat dimiliki oleh 1 dan juga dimiliki oleh turutan semua bilangan asli, maka sifat tersebut dimiliki oleh semua bilangan asli.

Aksioma ini, khususnya aksioma kelima, menjadi landasan prinsip induksi matematika yang dirumuskan sebagai berikut: Misalkan *S* adalah subset dari himpunan semua bilangan asli yang memiliki dua sifat yaitu

(1) $1 \in S$,

(2) untuk semua $n \in \mathbb{N}$, jika $n \in S$, maka $n+1 \in S$. Maka $S = \mathbb{N}$.

Prinsip Induksi Matematika (PMI = *The Principle of Mathematical Induction*) adalah suatu aksioma dari sistem bilangan-bilangan asli yang dapat digunakan untuk membuktikan pernyataan berkuantor yang berbentuk $\forall n P(n)$, dimana himpunan semesta pembicaraan adalah himpunan bilangan asli. Prinsip induksi memiliki beberapa bentuk yang ekivalen, yang semuanya didasarkan pada aksioma Peano. Aksioma tersebut menyatakan bahwa jika *S* adalah himpunan bilangan asli sedemikian sehingga (i) $0 \in S$ dan (ii) jika $n \in S$ maka $n+1 \in S$ sehingga $S = \mathbb{N}$. Pernyataan ini merupakan pernyataan yang sedikit rumit untuk dipahami karena tidak hanya berbentuk "jika … maka …", tetapi hipotesisnya juga mengandung pernyataan "jika … maka …" yaitu jika $n \in S$ maka $n+1 \in S$. Jika aksioma ini diterapkan pada tabel kebenaran maka akan diperoleh prinsip induksi matematika. Secara umum, prinsip induksi matematika dapat diterapkan apabila semesta pembicaraan merupakan himpunan bilangan bulat yang berbentuk $\{k, k+1, k+2, \cdots\}$ dengan *k* adalah sebarang bilangan bulat. Dalam hal ini, pernyataan induksi adalah sebagai berikut:

Misalkan P(n) adalah predikat pada domain $\{k, k+1, k+2, k+3, \cdots\}$, dengan *k* adalah anggota himpunan bilangan bulat Z.

Jika

(1) $\mathrm{P(k)}$ dan

(2) $\mathrm{P(n) \Rightarrow P(n+1)}$

maka $\forall \mathrm{n}, \mathrm{P(n)}$. "Untuk semua *n*", menyatakan untuk semua $\mathrm{n} \geq \mathrm{k}$.

Teorema 1.4. Jika untuk setiap bilangan bulat positif n terdapat pernyataan P_n yang bersesuaian, maka semua pernyataan P_n adalah benar, jika kedua syarat berikut ini terpenuhi:

1. P_1 benar
2. Untuk suatu bilangan bulat positif k sedemikian sehingga P_k benar, maka P_{k+1} juga benar.

Induksi matematika merupakan suatu metode khusus dalam pembuktian pernyataan tentang semua bilangan asli, misalnya "$n^3 - n$ selalu dapat dibagi 3", atau "Jumlah dari n bilangan bulat pertama adalah $\frac{\mathrm{n(n+1)}}{2}$. Selain itu, induksi matematika juga digunakan untuk memeriksa konjektur mengenai hasil dari suatu proses yang terjadi secara berulang dengan pola-pola perulangan yang berhingga. Salah satu contoh konjektur tersebut telah dirumuskan oleh Maurolycus pada tahun 1575 bahwa jumlah n bilangan ganjil pertama adalah n^2. Bukti konjektur tersebut ditunjukkan pada tabel di bawah ini.

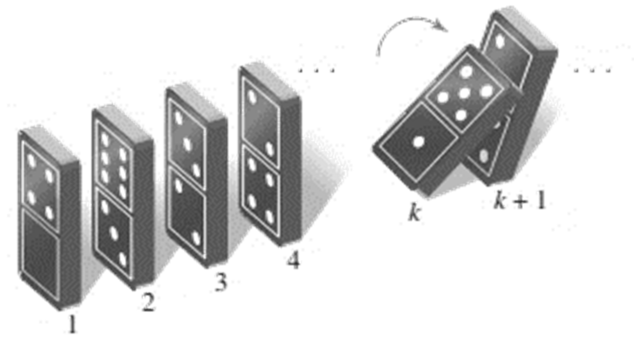
n	Jumlah dari n bilangan asli ganjil pertama	n^2
1	$1 =$	1
2	$1 + 3 =$	4
3	$1 + 3 + 5 =$	9
4	$1 + 3 + 5 + 7 =$	16
5	$1 + 3 + 5 + 7 + 9 =$	25
.	.	.
.	.	.
.	.	.
n	$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + (2n - 1) =$	n^2
.	.	.
.	.	.
.	.	.

E.1. Metode Pembuktian Dengan Induksi Matematika

Perhatikan suatu pernyataan yang menyatakan: “Untuk semua bilangan bulat $n \geq a$, berlaku sifat $P(n)$. Untuk membuktikan pernyataan tersebut dilakukan dua langkah sebagai berikut:

Langkah 1 (Langkah basis): Tunjukkan bahwa $P(a)$ benar.

Langkah 2 (Langkah induksi): Tunjukkan bahwa untuk semua bilangan bulat $k \geq a$, jika $P(k)$ benar, maka $P(k+1)$ benar. Untuk itu, anggap bahwa $P(k)$ benar, dengan $k \geq a$ adalah sebarang bilangan bulat (pengandaian ini disebut hipotesis induksi). Selanjutnya tunjukkan bahwa $P(k+1)$ benar.



Gambar 1. Efek domino

Contoh 1.26. Gunakan induksi matematik untuk membuktikan bahwa

$$1(1!) + 2(2!) + \cdots + n(n!) = (n+1)! - 1$$

<u>Bukti.</u>

Langkah basis: untuk *n* = 1, diperoleh

$$1(1!) = 1 = (1+1)! - 1 = 2! - 1 = 2 - 1 = 1.$$

Langkah induksi: untuk *n* = *k,* anggap benar bahwa

$$1(1!) + 2(2!) + \cdots + k(k!) = (k+1)! - 1$$

sehingga untuk *n* = *k* + 1, diperoleh

$$\begin{aligned} &1(1!) + 2(2!) + \cdots + k(k!) + (k+1)(k+1)! \\ &\qquad = (k+1)! - 1 + (k+1)(k+1)! \\ &\qquad = (k+1)!\{1 + (k+1)\} - 1 \\ &\qquad = (k+1)!\{k+2\} - 1 \\ &\qquad = (k+1)!(k+1) \\ &\qquad = (k+2)! - 1 \end{aligned}$$

Contoh 1.27. Buktikan bahwa $23^n - 1$ dapat dibagi oleh 11 untuk semua *n* bilangan bulat positif.

Bukti. Langkah basis: untuk n = 1, jelas bahwa $23^1 - 1 = 22$ dapat dibagi 11.

Langkah induksi: untuk *n = k,* anggap bahwa $11 | 23^k - 1$ untuk suatu bilangan bulat positif *k*.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa untuk *n* = *k* + 1,

$$\begin{aligned} 23^{k+1} - 1 = 23.23^k - 1 &= (11.2 + 1)23^k - 1 \\ &= 11.2.23^k + \underbrace{(23^k - 1)}_{\text{Langkah hipotesis}} \end{aligned}$$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $23^n - 1$ dapat dibagi oleh 11 untuk semua bilang bulkat positif *n*.

Contoh 1.28. Gunakan induksi matematik untuk membuktikan bahwa jumlah *n* buah bilangan ganjil positif pertama adalah n^2.

Bukti. Langkah basis: Untuk *n* = 1, jumlah satu buah bilangan ganjil positif pertama adalah $1^2 = 1$. Ini benar karena jumlah satu buah bilangan ganjil positif pertama adalah 1.

Langkah induksi: Andaikan untuk $n \geq 1$ pernyataan

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

adalah benar (hipotesis induksi) [catatlah bahwa bilangan ganjil positif ke-*n* adalah (2n-1). Akan ditunjukkan bahwa

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

juga benar karena

$$1 + 3 + 5 + \cdots + \overbrace{(2n - 1)}^{\text{suku ke}-n} + \underbrace{\overbrace{(2n + 1)}^{\text{suku ke}-(n+1)}}_{\substack{2(n+1)-1 \\ =2n+2-1 \\ =2n+1}} \qquad = n^2 + (2n + 1) = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$$

Karena telah ditunjukkan bahwa langkah basis dan langkah induksi benar, maka jumlah *n* buah bilangan ganjil positif pertama adalah n^2.

Contoh 1.29. Buktikan dengan induksi matematika bahwa polinomial $x - y$ membagi polinomial $x^n - y^n$.

Bukti. Langkah basis: $(x-y)\mid(x^1-y^1)$ karena $x-y=(x-y)\cdot 1$. Jadi pernyataan tersebut benar untuk n = 1.

Langkah induksi: Anggap bahwa $(x-y)\mid(x^n-y^n)$, akan ditunjukkan bahwa

$$(x-y)\mid(x^{n+1}-y^{n+1}).$$

Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} x^{n+1}-y^{n+1} &= xx^n-yy^n \quad = xx^n-yx^n+yx^n-yy^n \\ &= \underbrace{\underbrace{(x-y)x^n}_{(x-y)\mid(x-y)x^n}+\underbrace{y(x^n-y^n)}_{\substack{(x-y)\mid y(x^n-y^n) \\ \text{sesuai hipotesis}}}}_{\substack{\text{catatan: jika } x\mid a \text{ dan } x\mid b \text{ maka } x\mid(a+b) \\ \text{karena:} \\ \left.\begin{array}{l} x\mid a\Rightarrow a=px \\ x\mid b\Rightarrow b=qx \end{array}\right\} a+b=px+qx=(p+q)x\Leftrightarrow x\mid(a+b)}} \end{aligned}$$

menunjukkan bahwa

$$(x-y)\mid(x-y)x^n+y(x^n-y^n)$$

Oleh karena itu

$$(x-y)\mid(x^{n+1}-y^{n+1})$$

dan dapat disimpulkan bahwa

$$(x-y)\mid(x^n-y^n)$$

untuk semua n bilangan asli.

Salah satu soal induksi ditugaskan kepada Gauss oleh gurunya, yaitu jumlah dari bilangan 1 sampai dengan 100. Gauss tidak menjelaskan cara memperoleh jawaban 5050 pada saat itu, tetapi sekarang kita mengetahui bahwa:

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

yang dapat dibuktikan dengan induksi matematika. Jumlah semua bilangan tersebut secara langsung, sebagai berikut:

$$\begin{array}{rcccccccccccc} S(n) &=& 1 &+& 2 &+& 3 &+& \cdots &+& (n-1) &+& n \\ S(n) &=& n &+& (n-1) &+& (n-2) &+& \cdots &+& 2 &+& 1 \\ \hline 2S(n) &=& (n+1) &+& (n+1) &+& (n+1) &+& \cdots &+& (n+1) &+& (n+1) \end{array}$$

Jumlahan suku-suku $(n+1)$ ada sebanyak *n*, karena itu $2S(n)=n(n+1)$. Jadi jumlah $S(n+1)$ sama dengan $2S(n)/2$ yaitu $\frac{n(n+1)}{2}$.

Misalkan $S(n)$ adalah pernyataan

$$S(n):1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

maka langkah-langkah induksi untuk menyelesaikan masalah tersebut adalah:

Langkah Basis (n = 1): Pernyataan $S(1)$ menyatakan bahwa $1=\frac{1(2)}{2}$ adalah pernytataan yang benar, jadi $S(1)$ benar.

Langkah Induksi $(S(k)\Rightarrow S(k+1))$: Dengan menetapkan $k\geq 1$ dan mengandaikan bahwa $S(k):1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$ adalah pernyataan yang benar (pernyataan ini disebut **hipotesis induksi**). Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa

$$S(k+1):1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

adalah juga pernyataan yang benar.

Dari sisi kiri, diketahui bahwa

$$S(k+1):(1+2+3+\cdots+k)+(k+1)$$

$$=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$

$$=(k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right)=(k+1)\left(\frac{k}{2}+\frac{2}{2}\right)$$

$$=(k+1)\left(\frac{k+2}{2}\right)=\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$$

Jadi dapat disimpulkan bahwa untuk $n\geq 1$ pernyataan $S(n)$ adalah pernyataan yang benar.

E.2. Prinsip Induksi Sederhana

Misalkan $p(n)$ adalah pernyataan mengenai bilangan bulat positif dan kita ingin membuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif *n*. Untuk itu kita hanya perlu menunjukkan bahwa:

1. $p(1)$ *benar, dan*

untuk semua bilangan bulat positif $n \geq 1$, jika $p(n)$ *benar maka* $p(n+1)$ *juga benar.*

- Langkah 1 dinamakan **basis induksi**, sedangkan langkah 2 dinamakan **langkah induksi**.
- Langkah induksi berisi asumsi (andaian) yang menyatakan bahwa $p(n)$ benar. Asumsi tersebut dinamakan **hipotesis induksi**.
- Jika dapat ditunjukan bahwa kedua langkah tersebut benar maka pernyataan $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n.

Contoh 1.30. Teorema De Moivre

Misalkan θ adalah suatu bilangan real. Menurut De Moivre, untuk semua bilangan asli $n \in \mathbb{N}, (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$

Bukti.(Dalam pembuktian ini digunakan penjumlahan dan perkalian bilangan kompleks, dan rumus-rumus jumlahan sudut-sudut trigonometri:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

Langkah basis: untuk $n = 1$, jelas bahwa

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^1 = \cos\theta + i\sin\theta$$

Langkah induksi: asumsikan benar bahwa untuk $n = k$,

$$\exists k \in \mathbb{N} \ni (\cos\theta + i\sin\theta)^k = \cos k\theta + i\sin k\theta.$$

Selanjutnya dengan menggunakan rumus jumlahan sudut-sudut trigonometri,

$$\begin{aligned}
(\cos\theta + i\sin\theta)^{k+1} &= (\cos\theta + i\sin\theta)^k(\cos\theta + i\sin\theta) \\
&= (\cos k\theta + i\sin k\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)\langle\text{hipotesis}\rangle \\
&= \cos k\theta\cos\theta + i\sin k\theta\cos\theta + i\cos k\theta\sin\theta + i^2\sin k\theta\sin\theta \\
&= (\cos k\theta\cos\theta - \sin k\theta\sin\theta) + i(\sin k\theta\cos\theta + \cos k\theta\sin\theta) \\
&= \cos(k\theta+\theta) + i\sin(k\theta+\theta) = \cos(k+1)\theta + i\sin(k+1)\theta
\end{aligned}$$

Jadi disimpulkan bahwa

$$n \in N, (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

Contoh 1.31. Untuk semua bilangan bulat tidak-negatif n, buktikan dengan induksi matematik bahwa $2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

Bukti.

Langkah basis. Untuk n = 0 (bilangan bulat tidak negatif pertama), diperoleh:

$$2^0 = 2^{0+1} - 1$$

adalah pernyataan yang benar, karena $2^0 = 1 = 2^{0+1} - 1 = 2 - 1 = 1$

Langkah induksi. Anggap benar bahwa untuk semua bilangan bulat tak-negatif $n = k$, maka

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$$

adalah benar (hipotesis induksi). Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$$

juga benar.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} &= (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1}. \\
&= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 \\
&= 2.2^{k+1} - 1 \\
&= 2^{k+2} - 1
\end{aligned}$$

Jadi terbukti $2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ untuk semua bilangan bulat tidak-negatif n.

Contoh 1.32. Buktikan dengan induksi matematik bahwa pada sebuah himpunan beranggotakan n elemen, banyaknya himpunan bagian yang dapat dibentuk dari himpunan tersebut adalah 2^n.

Contoh 1.33. Buktikan pernyataan "Untuk membayar biaya pos sebesar n sen ($n \geq 8$) selalu dapat digunakan hanya perangko 3 sen dan perangko 5 sen" benar.

Bukti.

Langkah basis. Untuk membayar biaya pos 8 sen dapat digunakan 1 buah perangko 3 sen dan 1 buah perangka 5 sen saja. Ini jelas benar.

Langkah induksi. Andaikan bahwa untuk membayar biaya pos sebesar n ($n \geq 8$) sen dapat digunakan perangko 3 sen dan 5 sen (hipotesis induksi). Kita harus menunjukkan bahwa untuk membayar biaya pos sebesar n + 1 sen juga dapat menggunakan perangko 3 sen dan perangko 5 sen. Terdapat dua kemungkinan yang akan diselidiki:

(a) Kemungkinan pertama, misalkan kita membayar biaya pos senilai *n* sen dengan sedikitnya satu perangko 5 sen. Dengan mengganti satu buah perangko 5 sen dengan dua buah perangko 3 sen, akan diperoleh susunan perangko senilai *n* + 1 sen.

(b) Kemungkinan kedua, jika tidak ada perangko 5 sen yang digunakan, biaya pos senilai *n* sen menggunakan perangko 3 sen semuanya. Karena $n \geq 8$, setidaknya harus digunakan tiga buah perangko 3 sen. Dengan mengganti tiga buah perangko 3 sen dengan 2 buah perangko 5 sen, akan dihasilkan nilai perangko *n* + 1 sen.

Contoh 1.34. Sebuah mesin ATM hanya menyediakan pecahan uang Rp 20.000,- dan Rp 50.000, -. Kelipatan uang berapakah yang dapat dikeluarkan oleh ATM tersebut? Buktikan jawaban anda dengan induksi matematik.

Pembuktian dengan induksi lemah (induksi biasa) seringkali tidak dapat digunakan untuk menunjukkan bahwa jika $S(k)$ benar, maka $S(k+1)$ juga benar. Menggunakan fakta bahwa beberapa pernyataan $S(m)$ dimana $(m<k)$ dapat digunakan untuk menunjukkan bahwa $S(k+1)$ benar. Pada situasi seperti ini pembuktian dapat dilakukan dengan **induksi kuat.** Induksi kuat dilakukan dengan **cara** yang sama dengan induksi lemah, **kecuali pada langkah kedua**. Pada langkah ini, asumsi **tidak hanya** ditetapkan pada $S(k)$ untuk menunjukkan bahwa $S(k+1)$ benar, tetapi **diasumsikan bahwa semua pernyataan** $S(1), S(2), \cdots, S(n), \cdots, S(k)$ adalah pernyataan yang benar, kemudian menunjukkan bahwa $S(k+1)$ juga adalah pernyataan yang benar. Analogi dengan efek domino, induksi kuat menyatakan bahwa jika *k* kartu domino pertama jatuh dan mengakibatkan kartu domino ke-$(k+1)$ jatuh, maka semua kartu tersebut pasti jatuh.

E.3. Prinsip Induksi Kuat

Proposisi 1.1. Pernyataan-pernyataan $S(1), S(2), S(3), \cdots$ semuanya benar.

Bukti (Induksi Kuat)

(1) Buktikan bahwa pernyataan pertama $S(1)$ atau beberapa pernyataan pertama $S(n)$ benar.

(2) Untuk sebarang bilangan bulat $k \geq 1$, akan dibuktikan bahwa

$$[S(1) \wedge S(2) \wedge S(3) \wedge \cdots \wedge S(k)] \Rightarrow S(k+1)$$

Penerapan induksi kuat di bawah ini akan dilakukan dengan induksi lemah, kemudian memperlihatkan masalah yang dijumpai dengan induksi lemah tersebut.

Contoh 1.35. Buktikan bahwa $12 \mid (n^4 - n^2), \forall n \in \mathbb{N}$.

Bukti (dengan induksi lemah)

Langkah basis: untuk $n = 1$, dapat ditunjukkan bahwa $12 \mid (n^4 - n^2)$ karena $12 \mid 0$. Selanjutnya pada langkah induksi, diasumsikan bahwa

$$12 \mid (k^4 - k^2)$$

kemudian akan ditunjukkan bahwa $12 \mid ((k+1)^4 - (k+1)^2)$

Perhatikan bahwa $12 \mid (k^4 - k^2)$ menunjukkan bahwa $(k^4 - k^2) = 12a$ untuk suatu $a \in \mathbb{Z}$.

Hubungan tersebut digunakan untuk menunjukkan bahwa $(k+1)^4 - (k+1)^2 = 12b$ untuk suatu $b \in \mathbb{Z}$.

Diketahui bahwa:

$$\begin{aligned}(k+1)^4 - (k+1)^2 &= (k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1) - (k^2 + 2k + 1) \\ &= (k^4 - k^2) + 4k^3 + 6k^2 + 6k \\ &= 12a + 4k^3 + 6k^2 + 6k\end{aligned}$$

Pada tahap ini tidak ada ditunjukkan secara langsung bahwa penjabaran yang diperoleh dapat dibagi 12 dengan hasil bagi bilangan bulat. Karena itu diperlukan variasi induksi matematika yaitu induksi kuat.

Induksi kuat menggunakan asumsi bahwa $S(1), S(2), \cdots, S(k)$ adalah pernyataan-pernyataan yang benar, kemudian menunjukkan bahwa asumsi tersebut mengakibatkan $S(k+1)$ menjadi pernyataan yang benar. Secara spesifik dapat dikatakan bahwa jika $S(1)$ sampai dengan $S(k)$ adalah pernyataan yang benar, maka $S(k-5)$ adalah pernyataan yang benar karena $1 \leq k-5 \leq k$. Dengan induksi kuat akan ditunjukkan bahwa $S(k-5) \Rightarrow S(k+1)$, bukan $S(k) \Rightarrow S(k+1)$ seperti pada induksi lemah. Langkah basis yang akan dilakukan adalah memeriksa bahwa pernyataan-pernyataan

$$S(1), S(2), S(3), S(4), S(5), S(6)$$

semuanya benar. Dengan demikian $S(k-5) \Rightarrow S(k+1)$ menunjukkan bahwa semua $S(k)$ lainnya adalah benar. Sebagai contoh, jika $k = 6$, maka $S(k-5) \Rightarrow S(k+1)$ adalah $S(1) \Rightarrow S(7)$ sehingga $S(7)$ adalah pernyataan yang benar. Jika $k = 7$, maka

$S(k-5) \Rightarrow S(k+1)$ adalah $S(2) \Rightarrow S(8)$ sehingga $S(8)$ adalah pernyataan yang benar. Demikian seterusnya.

Proposisi 1.2. Jika $n \in \mathbb{N}$ maka $12 \mid (n^4 - n^2)$.

Bukti. (dengan induksi kuat)

(1) Langkah basis. Perhatikan bahwa pernyataan tersebut benar untuk enam bilangan bulat pertama:

$$n = 1 \Rightarrow 12 \mid n^4 - n^2 = 1^4 - 1^2 = 0$$
$$n = 2 \Rightarrow 12 \mid n^4 - n^2 = 2^4 - 2^2 = 12$$
$$n = 3 \Rightarrow 12 \mid n^4 - n^2 = 3^4 - 3^2 = 72$$
$$n = 4 \Rightarrow 12 \mid n^4 - n^2 = 4^4 - 4^2 = 240$$
$$n = 5 \Rightarrow 12 \mid n^4 - n^2 = 5^4 - 5^2 = 600$$
$$n = 6 \Rightarrow 12 \mid n^4 - n^2 = 6^4 - 6^2 = 1260$$

(2) Langkah induksi. Ambil $k \geq 6$ dan asumsikan bahwa $12 \mid \left(m^4 - m^2\right)$ untuk $1 \leq m \leq k$ yaitu asumsi bahwa pernyataan-pernyataan $S(1), S(2), \cdots, S(k)$ semuanya benar. Akan ditunjukkan bahwa $12 \mid ((k+1)^4 - (k+1)^2)$ yaitu pernyataan bahwa $S(k+1)$ benar. Karena $S(k-5)$ benar, maka diperoleh $12 \mid ((k-5)^4 - (k-5)^2)$. Misalkan

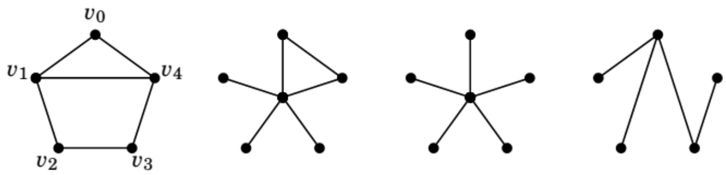
$$= k - 5, \text{ maka } 12 \mid \left(m^4 - m^2\right)$$

yang berarti $m^4 - m^2 = 12a$ untuk suatu bilangan bulat *a.* Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned}
(k+1)^4 - (k+1)^2 &= (m+6)^4 - (m+6)^2 \\
&= m^4 + 24m^3 + 216m^2 + 864m + 1296 - (m^2 + 12m + 36) \\
&= (m^4 - m^2) + 24m^3 + 216m^2 + 852m + 1260 \\
&= 12a + 24m^3 + 216m^2 + 852m + 1260 \\
&= 12(a + 2m^3 + 18m^2 + 71m + 105)
\end{aligned}$$

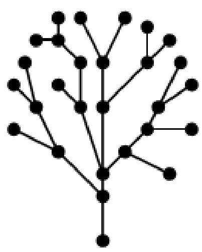
Karena $a + 2m^3 + 18m^2 + 71m + 105$ merupakan bilangan bulat, maka $12 \mid ((k+1)^4 - (k+1)^2)$ dan disimpulkan bahwa $12 \mid (m^4 - m^2)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Contoh selanjutnya adalah objek dalam matematika yang disebut *graf*. Di dalam matematika, istilah *graf* digunakan dalam dua konteks. Yang pertama adalah grafik, yang digunakan dalam persamaan dan fungsi aljabar dan kalkulus. Konteks *graf* yang lainnya adalah suatu konfigurasi yang terdiri atas titik-titik atau noktah yang disebut **vertice** (simpul) dan **edge** (sisi) yaitu garis-garis yang menghubungkan dua simpul. Beberapa bentuk graf dalam konteks ini ditunjukkan pada gambar di bawah ini. graf dapat ditelusuri dari satu simpul ke simpul lainya.



Gambar 1. Bentuk-bentuk graf

Suatu **Cycle (siklus)** di dalam graf adalah sederetan sisi yang berbeda membentuk suatu rute (lintasan) yang berhenti pada titik awal lintasan tersebut. Sebagai contoh, graf pada Gambar 1 memiliki siklus dengan titik asal v_1 menuju titik simpul v_2 kemudian ke v_3 dan ke v_4 dan akhirnya kembali ke v_1. Dua graf paling kiri dalam Gambar 1 memiliki Cycle, tetapi dua graf paling kanan tidak memiliki cycle. Graf yang tidak memiliki *cycle* dinamakan **Tree**. Tree pada Gambar 1 memiliki sisi yang lebih kurang (satu sisi) dari pada jumlah simpulnya. Gambar paling kanan memiliki 5 simpul dan 4 sisi. Sedangkan gambar kedua dari kanan memiliki 6 simpul dan 5 sisi. Jika kita menggambar sebarang *tree* yang memiliki *n* simpul maka jumlah sisinya selalu sama dengan $n - 1$. Pernyataan ini dapat dibuktikan akan selalu benar.



Gambar 1. Tree

Proposisi 1.3. Jika suatu *tree* memiliki *n* simpul, maka jumlah sisinya ada $n - 1$. Proposisi ini akan dijelaskan pada Contoh 1.36.

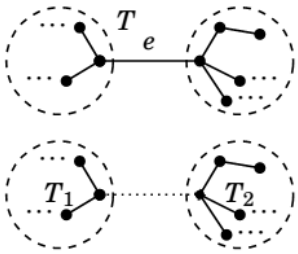
Contoh 1.36. Buktikan bahwa Jika suatu *tree* memiliki *n* simpul, maka jumlah sisinya ada $n - 1$.

Bukti.

Proposisi ini menyatakan bahwa untuk sebarang $n \in \mathbb{N}$, pernyataan di bawah ini adalah pernyataan yang benar: $S(n):$ Suatu *tree* yang memiliki *n* simpul memiliki *n* – 1 sisi. Pembuktian dilakukan dengan induksi kuat. Perhatikan bahwa jika suatu tree memiliki *n* = 1 simpul, maka tree tersebut memiliki *n* – 1 = 1 – 1 = 0 sisi. Sekarang ambil sebarang bilangan bulat $k \geq 1$. Akan ditunjukkan bahwa

$$(S(1) \wedge S(2) \wedge S(3) \wedge \cdots \wedge S(k) \Rightarrow S(k+1)).$$

Dengan kata lain harus ditunjukkan bahwa jika benar sebarang tree yang memiliki *m* simpul pasti memiliki *m* – 1 sisi dengan $1 \leq m \leq k$ maka sebarang tree yang memiliki $k+1$ simpul, pasti memiliki $(k+1)-1=k$ sisi. Selanjutnya akan dibuktikan dengan bukti langsung. Andaikan bahwa untuk setiap bilangan bulat *m* dengan $1 \leq m \leq k$ maka sebarang tree yang memiliki *m* simpul, pasti memiliki *m* – 1 sisi. Misalkan *T* adalah suatu tree yang memiliki *k* + 1 simpul. Tarik sebarang sisi dari *T* dan tandai dengan label *e,* seperti pada Gambar 3.



Gambar 2. Tree yang memiliki *m* simpul, memiliki *m* – 1 sisi.

Selanjutnya hapuskan sisi *e* dari *T,* tetapi titik-titik pada kedua ujungnya tidak dihilangkan. Hal ini akan membentuk dua tree yang lebih kecil, misalkan T_1 dan T_2. Selanjutnya misalkan T_1 memiliki *x* simpul dan T_2 memiliki *y* simpul. Karena T_1 dan T_2 masing-masing memiliki simpul kurang dari $k+1$ maka hipotesis induksi menjamin bahwa T_1 memiliki $x-1$ sisi dan T_2 memiliki $y-1$ sisi. Tree yang asli yaitu *T,* memiliki $x+y$ simpul, yang terdiri atas $x-1$ sisi untuk T_1 dan $y-1$ sisi untuk T_2, ditambah sisi *e* yang bukan sisi T_1 maupun T_2.

Jadi jumlah sisi *T* adalah $(x-1)+(y-1)+1=(x+1)-1$. Dengan kata lain, *T* memiliki sisi yang kurang satu dari pada jumlah simpulnya. Oleh karena itu, *T* memiliki $(k+1)-1=k$ sisi. Dengan demikian disimpulkan bahwa suatu tree yang memiliki *n* simpul akan memiliki *n* – 1 sisi.

Contoh 1.37. Buktikan bilangan Fibonacci ke-*n* bahwa

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Bilangan Fibonacci adalah barisan bilangan $1,1,2,3,5,8,13,21,34,\cdots$ yang dinyatakan dengan

$$a_n = \begin{cases} 1 \text{ untuk n = 1 dan 2} \\ a_{n-2} + a_{n-1} \text{ untuk } n > 2 \end{cases}$$

Bukti.

Untuk $n = 1$,

$$1 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}}$$

Untuk $n = 2$,

$$1 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}}$$

Selanjutnya diasumsikan bahwa

$$a_{n-1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}}$$

dan

$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_{n-1} + a_n \\ &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}} + \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} \\ &= \cdots \text{dst} \end{aligned}$$

Contoh 1.38. Bilangan bulat positif disebut prima jika dan hanya jika bilangan bulat tersebut habis dibagi dengan 1 dan dirinya sendiri. Kita ingin membuktikan bahwa setiap bilangan bulat positif n ($n \geq 2$) dapat dinyatakan sebagai perkalian dari (satu atau lebih) bilangan prima. Buktikan dengan prinsip induksi kuat.

Penyelesaian:

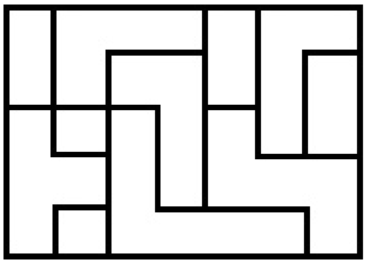
Langkah basis. Jika $n = 2$, maka 2 sendiri adalah bilangan prima dan di sini 2 dapat dinyatakan sebagai perkalian dari satu buah bilangan prima, yaitu dirinya sendiri.

Langkah induksi. Misalkan pernyataan bahwa bilangan $2, 3, \ldots, n$ dapat dinyatakan sebagai perkalian (satu atau lebih) bilangan prima adalah benar (hipotesis induksi). Kita perlu menunjukkan bahwa $n+1$ juga dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima. Pada kasus ini terdapat dua kemungkinan nilai dari $n+1$:

(a) Jika $n + 1$ sendiri bilangan prima, maka jelas ia dapat dinyatakan sebagai perkalian satu atau lebih bilangan prima.

(b) Jika $n+1$ bukan bilangan prima, maka terdapat bilangan bulat positif a yang membagi habis $n+1$ tanpa sisa. Dengan kata lain, $(n + 1)/a = b$ atau $n+1 = ab$ yang dalam hal ini, $2 \leq a \leq b \leq n$. Menurut hipotesis induksi, a dan b dapat dinyatakan sebagai perkalian satu atau lebih bilangan prima. Ini berarti, $n + 1$ jelas dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima, karena $n + 1 = ab$. Dengan demikian terbukti bahwa setiap bilangan bulat positif $n(n \geq 2)$ dapat dinyatakan sebagai perkalian dari (satu atau lebih) bilangan prima.

Contoh 1.39. Teka-teki potongan gambar (*jigsaw*) terdiri dari sejumlah potongan gambar (lihat Gambar 4). Dua atau lebih potongan dapat disatukan untuk membentuk potongan yang lebih besar. Lebih tepatnya, kita gunakan istilah blok bagi satu potongan gambar. Blok-blok dengan batas yang cocok dapat disatukan membentuk blok yang lain yang lebih besar. Akhirnya, jika semua potongan telah disatukan menjadi satu buah blok, teka-teki susun gambar itu dikatakan telah dipecahkan. Menggabungkan dua buah blok dengan batas yang cocok dihitung sebagai satu langkah. Gunakan prinsip induksi kuat untuk membuktikan bahwa untuk suatu teka-teki susun gambar dengan n potongan, selalu diperlukan n - 1 langkah untuk memecahkan teka-teki itu.



Gambar 4. Jigsaw

Penyelesaian:

(i) *Basis induksi*. Untuk teka-teki susun gambar dengan satu potongan, tidak diperlukan langkah apa-apa untuk memecahkan teka-teki itu.

(ii) *Langkah induksi*. Misalkan pernyataan bahwa untuk teka-teki dengan n potongan $(n = 1, 2, \ldots, k)$ diperlukan sejumlah $n - 1$ langkah untuk memecahkan teka-teki itu adalah benar (hipotesis induksi). Kita harus membuktikan bahwa untuk $n + 1$ potongan diperlukan n langkah.

Bagilah $n + 1$ potongan menjadi dua buah blok –satu dengan n_1 potongan dan satu lagi dengan n_2 potongan, dan $n_1 + n_2 = n + 1$. Untuk langkah terakhir yang menyempurnakan susunan jigsaw, dua buah blok disatukan sehingga membentuk satu blok besar. Menurut hipotesis induksi, diperlukan $n_1 - 1$ langkah untuk menyatukan blok yang satu dan $n_2 - 1$ langkah untuk menyatukan blok yang lain. Digabungkan dengan langkah terakhir yang menyatukan kedua blok tersebut, maka banyaknya langkah adalah $(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + 1 = (n_1 + n_2) - 2 + 1 = n + 1 - 1 = n$. Karena langkah (i) dan (ii) benar maka terbukti bahwa suatu gambar jigsaw susun gambar dengan n potongan, selalu diperlukan $n - 1$ langkah untuk menyusun kembali potongan gambar jigsaw tersebut.

Contoh 1.40. Tunjukkan apa yang salah dari pembuktian di bawah ini yang menyimpulkan bahwa semua kuda berwarna sama?

Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan bahwa semua kuda di dalam sebuah himpunan berwarna sama

(i) *Langkah basis*: jika kuda di dalam himpunan hanya seekor, jelaslah $P(1)$ benar.

(ii) *Langkah induksi*: andaikan bahwa semua kuda di dalam himpunan n ekor kuda berwarna sama adalah benar. Tinjau untuk himpunan dengan $n + 1$ kuda; nomori kuda-kuda tersebut dengan 1, 2, 3, …, n, n+1. Tinjau dua himpunan, yaitu n ekor kuda yang pertama

(1, 2, …n) harus berwarna sama, dan n ekor kuda yang terakhir (2, 3, …, n, n+1) juga harus berwarna sama. Karena himpunan n kuda pertama dan himpunan n kuda terakhir beririsan, maka semua n+1 kuda harus berwarna sama. Ini membuktikan bahwa $P(n+1)$ benar.

Penyelesaian: langkah induksi tidak benar jika $n + 1 = 2$, sebab dua himpunan (yang masing-masing beranggotakan $n = 1$ elemen) tidak beririsan.

Contoh 1.41. Temukan kesalahan dalam pembuktian berikut. Kita ingin membuktikan bahwa $a^n = 1$ untuk semua bilangan bulat tak-negatif n bilamana a adalah bilangan riil tidak-nol. Kita akan membuktikan ini dengan prinsip induksi kuat.

(i) *Basis induksi.* Untuk $n = 0$, jelas $a^0 = 1$ adalah benar sesuai definisi a^0.

(ii) *Langkah induksi. Misalkan* pernyataan tersebut benar untuk 0, 1, 2, …, n, yaitu $a^0 = 1$, $a^1 = 1$, $a^2 = 1$, …, $a^n = 1$. Akan ditunjukkan bahwa $a^{(n+1)} = 1$. Untuk menunjukkan hal ini, maka $a^{n+1} = \frac{a^n \, . \, a^n}{a^{n-1}} = \frac{1.1}{1} = 1$

Penyelesaian:

Kesalahan terjadi pada langkah induksi, karena untuk $n = 0$ kita tidak dapat menghitung $a^{0+1} = \frac{a^0 \, . \, a^0}{a^{-1}} = \frac{1 \times 1}{?}$ sebab nilai a^{-1} tidak terdapat dalam hipotesis induksi.

Contoh 1.42. Misalkan $x > -1$ adalah bilangan real. Buktikan bahwa $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ untuk semua n bilangan asli ℕ.

Bukti.

Langkah basis: untuk $n = 1$, $(1+x)^1 = 1 + 1 \cdot (x)$

Langkah induksi: asumsikan untuk $n = k, (1+x)^k \geq 1 + kx$ untuk suatu bilangan bulat k. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa untuk $n = k+1$,

$$\begin{aligned}
(1+x)^{k+1} &= (1+x)^k (1+x) \\
&\geq (1+kx)(1+x) = (1+x) + kx(1+x) \\
&= (1+x) + kx + kx^2 = 1 + x + kx + kx^2 = 1 + (k+1)x + kx^2 \\
&\geq 1 + (k+1)x
\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $(1+x)^n \geq 1+nx$ untuk semua bilangan asli *n*.

Contoh 1.43. Buktikan bahwa $2^n > n^2$ untuk semua bilangan asli $n \geq 5$.

Bukti.

Langkah basis: untuk *n* = 5, $2^5 = 32 > 25 = 5^2$.

Langkah induksi: anggap untuk *n* = *k*, $2^k > k^2$. untuk suatu bilangan bulat $k \geq 5$. Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa untuk *n* = *k* + 1,

$$2^{k+1} = 2^k 2 > 2k^2 (\text{hipotesis induksi}) > (k+1)^2$$

$$2k^2 > (k+1)^2 \text{ karena } 2k^2-(k+1)^2 = 2k^2-k^2-2k-1$$
$$= k^2-2k-1 = (k-1)^2-2 > 0; \quad k \geq 5.$$

Dengan demikian disimpulkan bahwa $2^n > n^2$ untuk semua bilangan asli $n \geq 5$.

Contoh 1.44. Misalkan $\{a_n\}$ adalah suatu barisan bilangan asli, sedemikian sehingga $a_1 = 5, a_2 = 13$ dan $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ untuk semua bilangan asli *n*. Buktikan bahwa $a_n = 2^n + 3^n$ untuk semua bilangan asli *n*.

Bukti.

Langkah basis: $a_1 = 5 = 2^1 + 3^1$ dan $a_2 = 13 = 2^2 + 3^2$.

Langkah induksi: andaikan untuk *n* = *k*, $a_k = 2^k + 3^k$ dan $a_{k+1} = 2^{k+1} + 3^{k+1}$ untuk semua bilangan asli *k*. Akan dibuktikan bahwa

$$\begin{aligned} a_{k+2} &= 5a_{k+1} - 6a_k \\ &= 5(2^{k+1}+3^{k+1}) - 6(2^k+3^k) \\ &= 5(2^k 2 + 3^k 3) - 6(2^k+3^k) \quad = 10(2^k)+15(3^k)-6(2^k)-6(3^k) \\ &\qquad = 4(2^k)+9(3^k) \\ &\qquad = 2^2(2^k)+3^2(3^k) \\ &\qquad = 2^{k+2}+3^{k+2} \end{aligned}$$

Jika $a_n = 2^n + 3^n$ berlaku untuk *n* = *k* dan untuk *n* = *k* +1, maka pernyataan tersebut juga berlaku untuk *n* = *k* + 2. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $a_n = 2^n + 3^n$ berlaku untuk semua bilangan asli *n*

Contoh 1.45. Perhatikan barisan yang didefinisikan sebagai berikut:

$$S_{m,n} = \begin{cases} 0 & \text{jika } m = 0 \text{ dan } n = 0 \\ S_{m-1,n} + 1 & \text{jika } n = 0 \\ S_{m,n-1} + 1 & \text{jika } n \neq 0 \end{cases}$$

Sebagai contoh,

$S_{0,0} = 0$ $\quad$ $S_{1,0} = S_{0,0} + 1 = 0 + 1 = 1$

$S_{0,1} = S_{0,0} + 1 = 1$ $\quad$ $S_{1,1} = S_{1,0} + 1 = 1 + 1 = 2$

$S_{2,0} = S_{1,0} + 1 = 2$ $\quad$ $S_{2,1} = S_{2,0} + 1 = 3, \ldots$

Buktikanlah dengan induksi matematik bahwa untuk pasangan tidak negatif m dan n, $S_{m,n} = m + n$.

Bukti.

Basis induksi. Karena (0, 0) adalah elemen terkecil di dalam X, maka $S_{0,0} = 0 + 0 = 0$. Ini benar dari definisi $S_{0,0}$.

Langkah induksi. Buktikan untuk semua $(m, n) > (0, 0)$ di dalam X bahwa jika $S_{m',n'} = m' + n'$ benar untuk semua $(m', n') < (m, n)$ maka $S_{m,n} = m + n$ juga benar. Andaikan bahwa $S_{m',n'} = m' + n'$ benar untuk semua $(m', n') < (m, n)$. Ini adalah hipotesis induksi. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $S_{m,n} = m + n$ untuk $n = 0$ maupun $n \neq 0$.

Kasus 1: Jika $n = 0$, maka berdasarkan definisi $S_{m,n} = S_{m-1,n} + 1$. Karena $(m-1, n) < (m, n)$, maka dari hipotesis induksi

$$S_{m-1,n} = (m-1) + n$$

sehingga

$$S_{m,n} = S_{m-1,n} + 1 = (m-1) + n + 1 = m + n.$$

Kasus 2: Jika $n \neq 0$, maka berdasarkan definisi $S_{m,n} = S_{m,n-1} + 1$.

Karena $(m, n-1) < (m, n)$, maka dari hipotesis induksi,

$$S_{m,n-1} = m + (n-1) + 1$$

sehingga

$$S_{m,n} = S_{m,n-1} + 1 = m + (n-1) + 1 = m + n.$$

Contoh 1.46. Buktikan bahwa $(3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n$ adalah suatu bilangan genap untuk semua bilangan asli *n*.

Bukti.Untuk penyederhanaan penulisan, dituliskan $f(n)=\alpha^n+\beta^n$, dimana $\alpha=3+\sqrt{5}$ dan $\beta=3-\sqrt{5}$. Dapat ditunjukkan bahwa $f(1)=6$ dan $f(2)=28$, merupakan bilangan genap. Selanjutnya, andaikan bahwa $f(k)$ dan $f(k+1)$ adalah bilangan-bilangan genap untuk sebarang bilangan bulat *k*.

Perhatikan untuk $n=k+2$. Perhatikan juga bahwa $\alpha=3+\sqrt{5}$ dan $\beta=3-\sqrt{5}$ adalah akar-akar dari persamaan kuadrat $x^2-6x+4=0$. Oleh karena itu, $\alpha^2=6\alpha-4$ dan $\beta^2=6\beta-4$. Jadi,

$$\begin{aligned} f(k+2) &= \alpha^{k+2}+\beta^{k+2} \\ &= \alpha^k\alpha^2+\beta^k\beta^2 \\ &= \alpha^k(6\alpha-4)+\beta^k(6\beta-4)=6\alpha^{k+1}-4\alpha^k+6\beta^{k+1}-4\beta^k \\ &= 6(\alpha^{k+1}+\beta^{k+1})-4(\alpha^k+\beta^k) \\ &= 6f(k+1)-4f(k) \end{aligned}$$

Karena $f(k)$ dan $f(k+1)$ adalah bilangan genap (menurut hipotesis), maka $f(k+2)$ juga adalah bilangan genap. Dengan demikian berdasarkan induksi matematika dapat disimpulkan bahwa $f(n)$ adalah suatu bilangan genap untuk semua *n* bilangan asli.

Teorema 1.5. Induksi 2-Dimensi, Versi 1

Misalkan $S(m,n)$ adalah suatu pernyataan yang melibatkan variabel-variabel 2 dimensi, *m* dan *n*. Andaikan:

1) $S(1,1)$ benar,
2) Jika $S(k,1)$ benar untuk suatu bilangan bulat *k* maka $S(k+1,1)$ juga benar;
3) Jika $S(h,k)$ berlaku untuk suatu bilangan bulat positif *h* dan *k*, maka $S(h,k+1)$ juga benar.

Maka dapat disimpulkan berdasarkan induksi matematika bahwa $S(m,n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif *m* dan *n*.

Contoh 1.47. Misalkan *f* adalah fungsi dari dua variabel dengan $f(1,1)=2$ dan

$$\begin{cases} f(m+1,n)=f(m,n)+2(m+n) \\ f(m,n+1)=f(m,n)+2(m+n-1) \end{cases}$$

untuk semua bilangan asli *m* dan *n*. Buktikan bahwa:

$f(m,n) = (m+n)^2 - (m+n) - 2n + 2$

untuk semua bilangan bulat positif *m* dan *n*.

Bukti.

Langkah basis: pertama ditunjukkan bahwa

$$f(1,1) = 2 = (1+1)^2 - 2(1) + 2$$

Langkah induksi:

Hipotesis: anggap bahwa

$$f(k+1) = (k+1)^2 - (k+1) - 2(1) + 2 = k^2 + k$$

untuk suatu bilangan bulat positif *k*. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa

$$\begin{aligned} f(k+1,1) &= f(k,1) + 2(k+1) \\ &= (k^2 + k) + (2k + 2) \\ &= [(k+1)+1]^2 - [(k+1)+1] - 2(1) + 2 \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa syarat (1) dan (2) dalam Teorema 1.5 terpenuhi.

Anggap bahwa

$$f(h,k) = (h+k)^2 - (h+k) - 2k + 2$$

untuk suatu bilangan bulat positif *h* dan *k*.

Maka,

$$\begin{aligned} f(h,k+1) &= f(h,k) + 2(h+k-1) \\ &= (h+k)^2 - (h+k) - 2k + 2 + 2(h+k) - 2 \\ &= (h+k+1)^2 - (h+k+1) - 2(k+1) + 2 \end{aligned}$$

Jadi syarat (3) dalam Teorema 1.5 terpenuhi. Karena syarat (1), (2), dan (3) dalam Teorema tersebut terpenuhi, maka dapat disimpulkan bahwa

$$f(m,n) = (m+n)^2 - (m+n) - 2n + 2$$

berlaku untuk semua bilangan bulat *m* dan *n*.

Teorema 1.6. Induksi 2-Dimensi, Versi 2.

Misalkan $S(m,n)$ adalah suatu pernyataan yang melibatkan 2 variabel *m* dan *n*. Andaikan:

(1) $S(1,1)$ benar;

(2) Jika untuk suatu bilangan bulat positif *k* > 1, $S(m,n)$ benar jika $m+n=k$ maka $S(m,n)$ benar jika $m+n=k+1$

Dengan demikian $S(m,n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif *m*, *n*.

Teorema 1.7

Misalkan $S(n)$ adalah pernyataan yang memuat suatu bilangan bulat *n*. Jika

(i) $S(k)$ benar, dan

(ii) Untuk setiap $n \geq k$, $[S(k) \wedge S(k+1) \wedge \cdots \wedge S(m)] \Rightarrow S(m+1)$ maka untuk setiap $n \geq k$, pernyataan $S(n)$ benar.

E.4. Pembuktian Prinsip Induksi Kuat Dengan Induksi Lemah

Asumsikan bahwa untuk suatu *k*, pernyataan $S(k)$ berlaku untuk setiap $m \geq k$,

$$[S(k) \wedge S(k+1) \wedge \ldots \wedge S(m)] \Rightarrow S(m+1).$$

Selanjutnya misalkan juga *B* adalah himpunan semua $n > m$, dimana $S(n)$ tidak berlaku. Jika $B \neq \varnothing$ dan $B \subset C$ maka menurut prinsip urutan rapi, *B* memiliki elemen terkecil, misalkan *l*. Berdasarkan definisi *B*, untuk setiap $k \leq t < l, S(t)$ berlaku. Pernyataan hipotesis induksi adalah benar, sehingga $S(l)$ juga benar. Hal ini kontradiksi dengan $l \in B$. Karena itu $B = \varnothing$.

E.5. Induksi Kuat Mencakup Induksi Lemah

Induksi lemah dapat dibuktikan dengan menggunakan induksi kuat. Asumsikan bahwa induksi kuat berlaku (untuk *k* = 1). Dalam hal ini, asumsikan bahwa jika $S(1)$ benar dan untuk semua $m \geq 1$,

$$[S(1) \wedge S(2) \wedge \cdots \wedge S(m)] \Rightarrow S(m+1),$$

maka untuk setiap $n \geq 1$, $S(n)$ benar.

Teorema 1.8. Sebarang bilangan bulat positif $n \geq 2$ merupakan hasilkali bilangan-bilangan prima.

Bukti. Misalkan $S(n)$ adalah pernyataan "*n* adalah hasil kali bilangan-bilangan prima".

Langkah basis. (*n* = 2). Karena *n* = 2 secara trivial adalah *hasilkali* bilangan prima (terdiri dari satu bilangan prima) maka $S(2)$ benar.

Langkah induksi. Ambil sebarang $m \geq 2$ dan asumsikan bahwa untuk sebarang *t* yang memenuhi $2 \leq t \leq m$, pernyataan $S(t)$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $S(m+1)$ yang menyatakan $m+1$ adalah hasilkali bilangan-bilangan prima, adalah pernyataan yang benar. Jika $m+1$ adalah bilangan prima, maka $S(m+1)$ benar. Jika $m+1$ bukan prima maka terdapat *r* dan *s* dengan $2 \leq r \leq m$ dan $2 \leq s \leq m$ sehingga $m+1 = rs$. Karena $S(r)$ diasumsikan benar bahwa *r* adalah hasilkali bilangan-bilangan prima, demikian pula $S(r)$, *s* adalah hasilkali bilangan-bbilangan prima. Oleh karena itu $m+1 = rs$ adalah hasilkali bilangan-bilangan prima jadi $S(m+1)$ adalah hasilkali bilangan-bilangan prima. Dengan demikian dalam kasus lainnya $S(m+1)$ juga adalah hasilkali bilangan-bilangan prima. Jadi berdasarkan induksi matematika, untuk setiap $n \geq 2$ pernyataan $S(n)$ benar.

Contoh 1.48. Untuk sebarang bilangan real *w, x, y,* dan *z,* jika $w+x = y+z$ maka bilangan tersbesar dari hasilkali *wx* dan *yz* dibentuk oleh pasangan bilangan yang memiliki selisih terkecil.

Bukti.

Misalkan $w+x = y+z$

$$(w+x)^2 - (w-x)^2 = 4wx$$
$$(y+z)^2 - (y-z)^2 = 4yz$$

Karena $w+x = y+z$ dan juga $(w+x)^2 = (y+z)^2$ maka ruas kiri kedua persamaan di atas memiliki nilai paling besar jika ruas kanannya paling kecil.

Proposisi 1.4. Jika *n* adalah sebarang bilangan bulat non-negatif, maka $5 \mid (n^5 - n)$

Bukti.

Bilangan bulat non-negatif yang pertama adalah 0, karena itu langkah basis mencakup juga *n* = 0.

(1) Jika *n* = 0, pernyataan di atas menjadi $5 \mid (0^5 - 0)$ dan merupakan pernyataan yang benar.

(2) Misalkan $k \geq 0$. Akan dibuktikan jika $5 \mid (k^5 - k)$ maka $5 \mid ((k+1)^5 - (k+1))$

Dengan pembuktian langsung, andaikan $5 \mid (k^5 - k)$ berarti $k^5 - k = 5a$ untuk suatu $k \in \mathbb{Z}$. Selanjutnya perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}(k+1)^5-(k+1) &= k^5+5k^4+10k^3+10k^2+5k+1-k-1\\ &= (k^5-k)+5k^4+10k^3+10k^2+5k\\ &= 5a++5k^4+10k^3+10k^2+5k\\ &= 5(a+k^4+2k^3+2k^2+k)\end{aligned}$$

Hal ini menunjukkan bahwa $(k+1)^5-(k+1)$ adalah bilangan bulat kelipatan 5, jadi $5\left|((k+1)^5-(k+1))\right.$. Karena $5\left|(k^5-k)\Rightarrow 5\right|((k+1)^5-(k+1))$ maka menurut induksi matematika, $5\left|(n^5-n)\right.$ untuk setiap *n* bilangan bulat non-negatif.

F. Soal-Soal Latihan

1. Tentukan nilai logika dari pernyataan-pernyataan di bawah ini.
   a. $\forall x \in \mathbb{R} \ni x^2 \geq x$
   b. $\exists y \in \mathbb{Z} \ni 3y = 4$
   c. $\forall y \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \ni \tan y > 0$
2. Selidikilah sah atau tidaknya penarikan kesimpulan yang dinyatakan dengan lambang berikut ini
   a. Premis 1 : $p \Leftrightarrow q$
      Premis 2 : $\sim p$
      Konklusi : $\sim q$

   b. Premis 1 : $p \Rightarrow q$
      Premis 2 : $r \Rightarrow \sim q$
      Konklusi : $p \Rightarrow \sim q$

   c. Premis 1 : $p \vee q$
      Premis 2 : $\sim q$
      Konklusi : p
3. Tentukanlah bentuk argumen untuk argumen di bawah ini dan tentukan apakah pernyataan tersebut valid atau tidak. Dapatkan diketahui bahwa kesimpulan benar jika premis-premisnya benar?
   a. Jika Socrates seorang manusia, maka Socrates akan meninggal.
      Socrates adalah seorang manusia
      $\therefore$ Socrates akan meninggal.

b. Jika George tidak berkaki delapan, maka George bukan laba-laba
George adalah seekor laba-laba
$\therefore$ George berkaki delapan.

4. Tentukan aturan inferensial apa yang digunakan di dalam setiap agrumen di bawah ini.
   a. Jika dosen berhalangan hadir, kuliah tidak dijalankan
      Kuliah dijalankan
      $\therefore$ Dosen tidak berhalangan hadir
   b. Kanguru hidup di Australia, dan Kanguru menyusui anak. Oleh karena itu kanguru menyusui anak.
   c. Hari ini panas sekali atau polusi berbahaya
      Hari ini tidak panas karena itu polusi berbahaya
5. Tentukan, apakah pernyataan berikut ini merupakan argumen-argumen yang valid.
   a. Jika x adalah bilangan real positif, maka x^2 adalah juga bilangan real positif.
   b. Jika $x^2 \neq 0$, dimana x adalah bilangan real, maka $x \neq 0$. Misalkan a adalah bilangan real dengan $a^2 \neq 0$; maka $a = 0$.
6. Selidikilah kebenaran dari aturan transitivitas universal yang menyatakan bahwa jika $\forall x P(x) \Rightarrow Q(x))$ dan $\forall x(Q(x) \Rightarrow R(x))$ adalah pernyataan-pernyataan yang benar, maka $\forall x(P(x) \Rightarrow R(x))$ adalah pernyataan yang benar, dengan domain dari semua kuantor tersebut adalah domain yang sama.
7. Gunakan aturan inferensial untuk menunjukkan bahwa jika $\forall x(P(x) \Rightarrow (Q(x) \wedge S(x)))$ dan $\forall x(P(x) \wedge R(x))$ adalah pernyataan yang benar, maka $\forall x(R(x) \wedge S(x))$ adalah pernyataan yang benar.
8. Gunakan aturan inferensial untuk menunjukkan bahwa jika $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ dan $\forall x((\sim P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow R(x))$ adalah pernyataan yang benar, maka pernyataan $\forall x(\sim R(x) \Rightarrow P(x))$ juga merupakan pernyataan yang benar.
9. Gunakan aturan inferensial untuk menunjukkan bahwa jika
$$\forall x(P(x) \vee Q(x)), \forall x(\sim Q(x) \vee S(x), \forall x(R(x) \Rightarrow \sim S(x)),$$
dan
$$\exists x \sim P(x)$$
adalah pernyataan-pernyataan yang benar, maka
$$\exists x \sim R(x)$$
juga benar.

10. Gunakan resolusi untuk menunjukkan bahwa hipotesis “Alfius adalah siswa yang nakal, atau Hilda adalah siswi yang baik”, dan “Alfius adalah siswa yang baik atau David bahagia” mengimplikasikan kesimpulan “Hilda adalah siswi yang baik atau David bahagia”
11. Gunakan resolusi untuk menunjukkan bahwa hipotesis “hari tidak hujan atau Ivon membawa payung”, “Ivon tidak membawa payung atau dia tidak kehujanan”, dan “hari hujan atau Ivon tidak kehujanan”, mungimplikasikan bahwa “Ivon tidak kehujanan.”
12. Gunakan resolusi untuk menunjukkan bahwa proposisi majemuk

$$(p \vee q) \wedge (\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$$

tidak pernah dapat terpenuhi.

Untuk soal nomor 13 – 20, tuliskan masing-masing pernyataan dengan menggunakan notasi kuantor.

13. Setiap pangkat bilangan bulat dari 2 adalah bilangan real.
14. Untuk setiap bilangan real x, $x^2 + 1$ adalah bilangan positif.
15. Ada suatu bilangan bulat n sedemikian sehingga $2^n = 1024$.
16. Ada suatu bilangan asli n sedemikian sehingga untuk setiap bilangan real x, xn merupakan bilangan non-negatif.
17. Untuk sebarang bilangan real x, terdapat bilangan real y sehingga $x + y = 0$.
18. Terdapat suatu bilangan real x sedemikian sehingga untuk setiap bilangan real y dalam domain $2 \leq y \leq 3$, diperoleh $1 \leq xy \leq 2$.
19. Terdapat bilangan real x dan y sedemikian sehingga $x + y \in \mathbb{Z}$ tetapi $xy \notin \mathbb{Z}$.
20. Hasilkali dari sebarang dua bilangan asli adalah bilangan asli.

Untuk soal nomor 21 – 28, tuliskan negasi dari masing-masing pernyataan dengan menggunakan notasi kuantor.

21. $\forall x \in [-2, 2], x^3 \in [0, 8]$
22. $\exists n \in \mathbb{Z}^-$ sedemikian sehingga $5n + 2 > 1$
23. $\forall x \in \mathbb{R}^+, x^2 > 4 \Rightarrow x > 2$.
24. $\forall x \in (-\infty, -4), \sqrt[3]{x} > 0 \Rightarrow x = -5$
25. $\exists n \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $\forall m \in \mathbb{Z}, nm < 1$

26. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $x^y \in \mathbb{Z}$

27. $\forall m, n \in \mathbb{Z}, m + n \in \mathbb{Z}.$

28. $\exists m, n \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $9m - 7n = 1$.

Untuk soal nomor 29, tentukan himpunan semestanya sehingga masing-masing pernyataan bernilai benar

29. Misalkan T = {17}, U = {6}, V = {24} dan W = {2, 3, 7, 26}
    a. $(\exists x)(x \text{ ganjil} \Rightarrow x > 8)$
    b. $(\forall x)(x \text{ ganjil} \wedge x > 8)$
    d. $(\exists x)(x \text{ ganjil} \wedge x > 8)$
    e. $(\exists x)(x \text{ ganjil} \vee x > 8)$

30. Tentukan pernyataan mana yang bernilai benar. Himpunan semesta dari pernyataan diberikan dalam tanda kurung.
    a. $(\forall x)(x + x \geq x).(\mathbb{R})$
    b. $(\forall x)(x + x \geq x).(\mathbb{N})$
    c. $(\exists x)(3^x = x^2).(\mathbb{R})$
    d. $(\exists x)(3^x = x).(\mathbb{R})$
    e. $(\exists x)(3(2 - x) = 5 + 8(1 - x)).(\mathbb{R})$

31. Himpunan semesta untuk pernyataan di bawah ini adalah himpunan semua bilangan real. Tentukan pernyataan mana yang benar.
    a. $(\forall x)(\exists y)(x + y = 0)$
    b. $(\exists x)(\exists y)(x^2 + y^2 = -1)$
    c. $(\exists ! y)(y < 0 \wedge y + 3 > 0)$
    d. $(\exists ! x)(\forall y)(x = y^2)$
    e. $(\forall y)(\exists ! x)(x = y^2)$

32. Suatu kalimat terbuka *p(x,y)*: $y - x = y + x^2$, dengan *x* dan *y* adalah bilangan-bilangan bulat. Berdasarkan kalimat tersebut di atas, tentukanlah nilai kebenaran untuk masing-masing pernyataan-pernyataan di bawah ini.
    a. $p(0,0)$
    b. $p(1,1)$
    c. $p(0,1)$
    d. $\forall y, p(0,y)$

33. Kuantor $\exists_n$ menyatakan "*terdapat tepat n*", sehingga $\exists_n x P(x)$ berarti terdapat tepat *n* dalam domain sedemikian sehingga *P*(*x*) bernilai benar. Dengan menggunakan prinsip tersebut, tentukanlah nilai kebenaran dari pernyataan-pernyataan di bawah ini. Domain setiap pernyataan adalah semua bilangan real.

a. $\exists_0 x\left(x^2=-1\right)$
b. $\exists_2 x\left(x^2=2\right)$
c. $\exists_1 x\left(|x|=0\right)$
d. $\exists_3 x\left(x=|x|\right)$

34. Nyatakan masing-masing pernyataan di bawah ini dengan kuantor eksistensial dan kuantor universal. Proposisi $\exists_n$ sama dengan nomor 33.
    a. $\exists_0 xP(x)$
    b. $\exists_1 xP(x)$
    c. $\exists_2 xP(x)$
    d. $\exists_3 xP(x)$
35. Misalkan $P(x, y)$ adalah suatu fungsi proposisional. Tunjukkan bahwa $\exists x \forall y\, P(x, y) \Rightarrow \forall y \exists x\, P(x, y)$ merupakan tautologi.
36. Tentukan pernyataan manakah berikut ini yang merupakan tautologi, kontradiksi, atau yang lainnya.
    a). $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow p] \Rightarrow p$
    b). $p \Leftrightarrow p \wedge (p \vee q)$
    c). $p \Rightarrow q \Leftrightarrow p \wedge \sim q$
    d). $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow \sim(\sim p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)$
    e). $[p \Rightarrow (q \wedge r)] \Rightarrow [r \Rightarrow (p \Rightarrow q)]$
    f). $[p \Rightarrow (q \wedge r)] \Rightarrow r \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

Buktikan pernyataan-pernyataan di bawah ini dengan induksi matematika

37. $1+3+9+\cdots+3^{n-1}=\frac{1}{2}\left(3^n-1\right)$
38. $4+8+12+\cdots+4n=2\left(n^2+n\right)$
39. $2+4+8+\cdots+2^n=2^{n+1}-2$
40. $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$
41. $2+2^2+2^3+\cdots+2^2=2\left(2^n-1\right)$
42. $1^2+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$
43. $1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3=n^2\left(2n^2-1\right)$

44. $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

45. $\frac{1}{1.4}+\frac{1}{4.7}+\frac{1}{7.10}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}$

46. $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

47. $a+(a+d)+(a+2d)+(a+3d)+\cdots(a+(n-1)d)=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$

48. $a+ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^{n-1}=a\frac{1-r^n}{1-r}; r\neq 1$

Buktikanlah setiap pernyataan di bawah ini dengan menggunakan induksi matematika.

49. Untuk sebarang bilangan bulat $n\geq 0, 24|(5^{2n}-1)$

50. Untuk sebarang bilangan bulat $n\geq 0, 3|(n^3+5n+6)$

51. Untuk sebarang bilangan bulat $n\geq 0, 9|(4^{3n}+8)$

52. Untuk sebarang bilangan bulat $n>0,\ 2003|(4007^n-1)$

53. Untuk sebarang bilangan bulat $n>0,\ 4005|(2002^{n+2}+2003^{2n+1})$

Untuk soal nomor 54-59, misalkan *x* dan *y* adalah bilangan-bilangan bulat, dan *m* dan *n* adalah bilangan bulat positif. Gunakan induksi matematika untuk membuktikan pernyataan-pernyataan di bawah ini.

54. $(xy)^n=x^ny^n$.

55. $(x^m)^n=x^{mn}$.

56. $(m+n)x=mx+nx$.

57. $x^mx^n=x^{m+n}$.

58. $n(x+y)=nx+ny$.

59. $m(nx)=(mn)x$.

BAB II
DASAR-DASAR KOMBINATORIKA

Kombinatorika merupakan cabang matematika diskrit yang mempelajari susunan objek-objek yang berhingga dengan karakteristik tertentu. Kombinatorika mulai dikenal pada abad ke-17 melalui tulisan G. W. Leibniz yang berjudul *Dissertion de Arte Combinatorica.* Kajian kombinatorika sangat luas tetapi dalam bab ini hanya akan dipelajari kombinatorika enumeratif, yang mempelajari cara-cara menghitung himpunan objek-objek diskrit dan berhingga yang memenuhi syarat-syarat tertentu. Hal ini biasanya meliputi penghitungan banyaknya cara melakukan perhitungan dengan pola-pola tertentu dan memungkinkan untuk menjawab pertanyaan seperti:

- Berapa kemungkinan kejadian di dalam suatu undian dan berapa banyak tiket yang harus dibeli agar peluang untuk menang setidak-tidaknya 1%?
- Ada berapa banyak cara menukar uang lembaran Rp. 100.000 menjadi pecahan Rp. 2000, Rp. 5000, Rp. 10.000., Rp. 20.000, dan Rp. 50.000?
- Ada berapa banyak DNA berbeda yang dapat disusun dari seratus nukleotida?
- Ada berapa cara sambungan telepon dapat dilakukan dari Jakarta ke Makassar melalui kantor-kantor cabang Telkomsel?

Definisi 2.1. Kombinatorika adalah teori pencacahan yang meliputi cara penyusunan objek-objek tanpa harus mengenumerasi semua kemungkinan susunannya. Teori kombinatorika diterapkan untuk menghitung jenis dan banyaknya sampel yang sedang dikaji. Ada dua prinsip utama dalam menghitung sampel dari suatu peristiwa. Kedua prinsip dasar tersebut adalah prinsip penjumlahan dan prinsip perkalian.

Prinsip penjumlahan dapat dilihat pada berbagai kasus dalam kehidupan sehari-hari. Misalnya sekelompok mahasiswa pergi mendaki gunung. Lima orang anggota tim memutuskan berhenti di ketinggian tertentu. Tujuh orang lainnya berhasil sampai ke puncak. Ada berapa orang mahasiswa yang pergi mendaki gunung?

Mahasiswa mungkin mentertawakan pertanyaan sesederhana itu karena dengan mudah dapat dipastikan bahwa adalah $5 + 7 = 12$ orang mahasiswa. Tetapi perlu dicatat bahwa jawaban yang sederhana seperti itu hanya merupakan kemungkinan karena semua anggota tim yang pergi mendaki gunung bisa saja memutuskan untuk berhenti atau melanjutkan pendakian. Tidak ada kemungkinan bahwa mahasiswa yang berhenti di tengah jalan akan berhasil sampai di puncak. Demikian juga, mahasiswa yang berhasil sampai di puncak tidak mungkin berhenti dan pulang di tengah pendakian. Dengan kata lain, mahasiswa tersebut dapat dikelompokkan dalam dua kelompok, yaitu yang berhasil sampai ke puncak dan mahasiswa yang berhenti di tengah perjalanan.

Sebaliknya jika dimisalkan bahwa kita tidak mengetahui berapa mahasiswa yang berhasil sampai ke puncak dan berapa mahasiswa yang berhenti, tetapi diketahui lima orang mengenakan kaos berwarna putih dan delapan orang mengenakan topi berwarna coklat. Dalam hal ini tidak dapat diketahui berapa orang yang pergi medaki gunung, karena mungkin saja ada anggota tim yang mengenakan kaos putih juga memakai topi berwarna coklat. Beberapa anggota tim bisa saja berada di dalam dua kelompok berbeda pada saat yang sama. Anggota tim yang mengenakan kaos putih dan memakai topi berwarna coklat tergabung kedua kelompok yang dimaksudkan. Mungkin juga ada anggota tim yang tidak masuk ke dalam salah satu kelompok karena tidak mengenakan kaos putih, dan tidak mengenakan topi berwarna coklat. Pada kasus seperti ini, banyaknya anggota tim yang pergi mendaki gunung tidak dapat diketahui dengan menjumlahkan banyaknya anggota tim yang mengenakan kaos putih dengan jumlah anggota tim yang memakai topi berwarna coklat.

Prinsip utama dan yang paling mudah dari pencacahan akan dijelaskan di bawah ini. Misalkan $|X|$ menyatakan banyaknya elemen dari himpunan X yang berhingga. Jadi $|\{2,3,5,7\}| = 4.$ Pembahasan tentang anggota himpunan akan lebih mudah jika mahasiswa sudah memahami bahwa dua himpunan bagian dikatakan disjoin jika himpunan bagian tersebut tidak memiliki anggota himpunan yang sama.

A. Aturan Dasar Pencacahan

Banyak masalah pencacahan yang tidak dapat diselesaikan hanya dengan menggunakan aturan penjumlahan atau aturan perkalian. Meskipun demikian, dengan menggunakan kombinasi antara keduanya dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah tersebut. Hal ini terlihat penerapannya pada salah satu bahasa pemrograman komputer, yaitu BASIC. Dalam bahasa pemrograman ini, penamaan dari suatu variabel merupakan string yang terdiri atas satu atau dua karakter alfanumerik, dimana huruf kapital tidak dibedakan dengan huruf kecil. Nama variabel harus diawali dengan huruf dan harus berbeda dengan lima perintah dari dua karakter yang digunakan dalam bahasa program. Ada berapa nama variabel yang berbeda menurut program BASIC?

Misalkan V adalah banyaknya nama variabel yang berbeda di dalam versi BASIC ini. Selanjutnya misalkan V_1 adalah banyaknya nama variabel tersebut yang hanya terdiri atas satu karakter dan V_2 adalah variabel yang panjangnya dua karakter. Menurut aturan penjumlahan, $V = V_1 + V_2$. Perhatikan bahwa $V_1 = 26$, karena suatu variabel yang panjangnya hanya satu karakter pastilah merupakan suatu huruf. Selanjutnya berdasarkan aturan perkalian, terdapat 26.36 nama variabel yang panjangnya dua karakter yang diawali dengan suatu huruf dan diakhiri dengan karakter alfanumerik. Lima dari nama variabel ini tidak dihitung karena nama variabel tersebut telah digunakan sebagai perintah dasar dalam BASIC. Jadi $V_2 = 26.36 - 5 = 931$. Karena itu diperoleh $V = V_1 + V_2 = 26 + 931 = 957$ nama variabel yang berbeda dalam versi BASIC tersebut.

Misalkan terdapat sejumlah berhingga pilihan yang harus diambil. Jumlah pilihan yang akan diambil tidak tergantung pada pilihan yang diambil sebelumnya. Maka banyaknya cara mengambil pilihan tersebut adalah hasilkali dari banyaknya masing-masing pilihan-pilihan. Secara simbolis, misalkan c_i adalah banyaknya pilihan *i* yang akan diambil. Jika $1 \le i \le n,\text{dan}\, c_{i+1}$ tidak bergantung pada pilihan yang diambil untuk $1, \cdots, i,$ maka banyaknya cara untuk mengambil pilihan adalah $c_1 x c_2 x c_3 x \cdots x c_n$.

Jika kita akan menyusun kata secara acak dari susunan empat huruf yang ada, maka langkah pertama yang akan dilakukan adalah menuliskan salah satu kata yang memuat huruf-huruf tersebut. Langkah selanjutnya adalah memutuskan dari empat huruf yang tersedia, huruf mana yang harus dituliskan pertama kali. Dalam hal ini $c_1 = 4.$ untuk setiap cara mengambil $c_1,$ terdapat $c_2 = 3$ pilihan, yaitu huruf kedua yang akan dituliskan, $c_3 = 2$ dan $c_4 = 1.$ Huruf-huruf yang diambil dalam setiap pilihan tergantung pada pilihan yang pertama kali diambil, tetapi jumlah pilihannya tetap sama. Inilah yang dimaksud bahwa pengambilan pilihan tidak bergantung pada pilihan yang diambil sebelumnya. Jadi berdasarkan prinsip pencacahan dasar, banyaknya kata yang dapat disusun dari empat huruf adalah $c_4 \,x\, c_3 \,x\, c_2 \,x\, c_1 = 4 \,x\, 3 \,x\, 2 \,x\, 1.$

Perkalian yang berbentuk $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ memiliki sifat yang sangat penting di dalam kombinatorika. Perkalian seperti ini dituliskan dengan lambang *n*! dan dibaca *n* faktorial. Penggunaannya akan ditunjukkan melalui beberapa contoh masalah penyusunan.

Banyaknya kata yang terdiri atas empat huruf dapat dibuat dengan menyusun huruf-huruf dalam kata MATH adalah 4! = 24.

MAHT	MATH	MTAH	MTHA	MHAT	MHTA
ATMH	ATHM	AMTH	AMHT	AHMT	AHTM
THAM	THMA	TMAH	TMHA	TAMH	TAHM
HMTA	HMAT	HATM	HAMT	MTMA	HTAM

Bagaimana dengan kata MATHS? Tentu saja banyaknya kata yang dapat disusun dari semua huruf di dalam kata MATHS adalah sebanyak 5! = 120 kata. Kita dapat menyusun suatu daftar sistematis yang terdiri atas 5 baris, dengan masing-masing baris terdiri atas 4! = 24 kata.

Bagaimana lagi dengan kata OBOR? Ada berapa banyak kata yang terdiri atas 4 huruf dari kata OBOR tersebut yang dapat disusun? Apakah prinsip pencacahan dasar masih dapat diterapkan? Sekali lagi, bayangkan bahwa kita akan memilih secara acak kata yang terdiri atas semua huruf tersebut. Keputusan yang akan diambil adalah memilih satu dari huruf O, B, atau R (bukan memilih dari O, B, O, dan R). Jadi untuk kasus ini, $c_1 = 3$. Banyaknya cara untuk mengambil c_2 tergantung pada huruf yang pertama dipilih. Misalkan B dipilih sebagai huruf pertama, maka pilihan kedua hanya dua kemungkinan yaitu huruf O atau R. Tetapi jika huruf yang pertama dipilih adalah O, maka pilihan berikutnya ada tiga kemungkinan, yaitu B, O, atau R. Apakah kemungkinan yang terjadi adalah $c_2 = 2$ atau $c_2 = 3$? Jawabannya adalah bahwa *prinsip pencacahan dasar tidak berlaku dalam kasus ini* (setidak-tidaknya tidak langsung). Prinsip pencacahan dasar hanya berlaku jika banyaknya pilihan $i+1$ tidak bergantung pada i pilihan yang diambil sebelumnya.

Untuk mencacah semua kemungkinan susunan huruf di dalam kata OBOR, kita membedakan kedua huruf O, misalnya dengan menuliskannya sebagai OBoR. Selanjutnya dengan menggunakan prinsip pencacahan dasar, diperoleh 4! = 24 kata yang *terlihat* berbeda dari huruf O, B, o, dan R.

BOoR	BORo	BoOR	BoRO	BROo	BRoO
OBoR	OBRo	OoBR	OoRB	ORBo	ORoB
oBOR	oBRO	oOBR	oORB	oRBO	oROB
RBOo	RBoO	ROBo	ROoB	RoBO	RoOB

Dari daftar kata-kata yang tersusun pada daftar di atas, terdapat kata seperti $\mathrm{OBoR\ dan\ oBOR}$ yang terlihat berbeda karena kita telah membedakan kedua huruf O. Faktanya, kedua kata tersebut adalah sama. Jadi, banyaknya kata yang dapat disusun dari kata OBOR bukannya 4! Melainkan 4!/2 = 12.

Bagaimana dengan UMUM? Pertama, tuliskan sebagai UMum. Seperti kasus sebelumnya, banyaknya kata yang dapat disusun dari huruf-huruf tersebut adalah 4! = 24. Jumlah ini harus dibagi dibagi 2 karena ada dua U. Selanjutnya jumlah tersebut dibagi 2 lagi, karena adanya 2 huruf M di dalam kata tersebut. Dengan demikian, banyaknya kata yang dapat disusun dari huruf UMUM adalah $24/(2\mathrm{x}2)=6$. Secara eksplisit susunan semua huruf tersebut adalah:

MMUU MUMU MUUM UMMU UMUM UUMM

Bagaimana lagi untuk kata LULL? Ada berapa banyak kata yang dapat disusun dengan menggunakan semua huruf di dalam kata tersebut? Dengan contoh kata UMUM, dapatkah dipastikan bahwa banyaknya kata yang dapat disusun dari LULL adalah 4!/3 = 8? Ternyata tidak. Dengan mudah dapat dilihat bahwa jawaban yang sebenarnya adalah 4. Bagaimana bisa? Dengan mengetahui kemungkinan semua letak huruf U, maka susunan kata-kata yang terbentuk adalah

ULLL, LULL, LLUL, LLLU

Untuk menunjukkan bahwa 4!/3 adalah jawaban yang salah, kita menyusun huruf-huruf di dalam LULL dengan membedakan ketiga huruf L menjadi $L_1,\ L_2,\ \mathrm{dan}\, L_3$ sehingga susunan semua huruf ada 4! = 24. Jika susunan ke-24 kata tersebut dituliskan dengan menghapus semua indeks pada huruf L, berapa kata LLLU yang muncul? Jawaban untuk pertanyaan ini dapat diselesaikan dengan prinsip pencacahan dasar. Ada tiga pilihan: kemungkinan pertama adalah menempatkan tiga L berturut-turut di depan. Ada dua kemungkinan yang dapat dipilih selanjutnya, yaitu huruf mana dari kedua huruf L yang tersisa yang akan dituliskan pada urutan kedua, dan satu pilihan untuk kemungkinan ketiga, yaitu huruf L mana yang akan dituliskan pada urutan ketiga. Dengan kata lain, LLLU akan muncul sebanyak 3! = 6 kali. Jadi banyaknya cara menyusun keempat huruf tersebut adalah 4!/3! = 24/6 = 4 kali.

Anda bersiap untuk menyelesaikan banyaknya susunan huruf yang dapat dibuat dari semua kata di dalam MISSISSIPPI? Cara penyelesaiannya sama saja. Misalkan semua hurufnya berbeda, maka akan diperoleh banyaknya susunan adalah 11! Karena ada 4 huruf I di dalamnya, maka 11! harus dibagi 4!. Selanjutnya harus dibagi dengan 4! untuk 4 huruf S, dan dibagi 2! untuk 2 huruf P. Jadi banyaknya kata yang dapat disusun dengan semua huruf MISSISSIPPI adalah

$$\frac{11!}{4!4!2!1!} = 34.650.$$

Masalah MISSISSIPPI dapat diselesaikan dengan suatu cara khusus yang dinamakan *koefisien multinomial*, yang akan dipelajari pada Bab III tentang permutasi dan kombinasi. Koefisien multinomial dituliskan dalam bentuk

$$\binom{n}{r_1, r_2, \cdots, r_k} = \frac{n!}{r_1!r_2!r_3!\cdots r_k!}, \tag{2.1}$$

dimana $r_1 + r_2 + r_3 + \cdots + r_k = n.$

Dengan menggunakan koefisien binomial, dapat diketahui bahwa banyaknya kata yang dapat dibentuk dari semua huruf yang terdapat di dalam kata SASSAFRAS adalah

$$\binom{9}{4,3,1,1} = \frac{9!}{4!\,x\,3!\,x\,1!\,x\,1!} = \frac{9 \text{ x } 8 \text{ x } 7 \text{ x } \cancel{6} \text{ x } 5 \text{ x } \cancel{4 \text{ x } 3 \text{ x } 2 \text{ x } 1}}{\cancel{4 \text{ x } 3 \text{ x } 2} \text{ x } 1 \text{ x } \cancel{3 \text{ x } 2 \text{ x } 1} \text{ x } 1 \text{ x } 1} = 2520$$

Contoh 2.1. Suatu susunan huruf terdiri atas A, I, L, S, dan T. kelima huruf akan disusun menjadi suatu kata yang terdiri atas enam huruf yang diawali dan diakhiri huruf konsonan, dan mengapit dua vokal yang tidak berdampingan. Konsonan yang berdekatan harus berbeda. Ada berapa kata yang dapat dibentuk?

Jawab. Dengan menyusun secara sistematis daftar yang diperlukan, maka daftar susunan kata yang dapat dibentuk adalah LALALS, LALALT, LALASL, LALAST, LALATL, LALATS, LALILS, dan berakhir dengan TSITAT, TSITIL, TSITIS, TSITIT.

A.1. Aturan Penjumlahan

Jika A dan B adalah dua himpunan berhingga yang disjoint (saling lepas), maka

$$|A \cup B| = |A| + |B| \tag{2.2}$$

Bukti. Kedua sisi persamaan ini menunjukkan banyaknya anggota himpunan yang sama, yaitu himpunan $A \cup B$. Sisi kiri secara langsung menunjukkan jumlah anggota himpunan tersebut, sedangkan sisi kanan menunjukkan banyaknya anggota himpunan A dan B secara terpisah. Pada masing-masing kasus, setiap anggota himpunan dihitung dengan tepat satu kali (karena A dan B disjoin), sehingga kedua sisi persamaan di atas adalah sama.

Aturan Penjumlahan sering juga dinyatakan sebagai berikut: Jika suatu tugas dapat dilakukan dengan salah satu cara dari n_1 cara atau salah satu cara dari n_2 cara, dimana tidak satupun cara dari n_1 yang sama dengan salah satu cara di n_2 maka ada $n_1 + n_2$ cara untuk melakukan tugas tersebut di atas. Ringkasnya, jika suatu tugas dapat dilakukan dengan *m* cara dan tugas kedua dapat dilakukan dalam *n* cara dimana kedua tugas tersebut tidak dapat dilakukan secara serempak, maka banyaknya pilihan untuk menyelesaikan salah satu cara dari kedua tugas tersebut dapat dilakukan dengan *m* + *n* cara.

Contoh 2.2. Seorang guru mengajar di kelas 4, kelas 5, dan kelas 6. Jika jumlah siswa kelas 4 adalah 25 orang, jumlah siswa kelas 5 adalah 24 orang, dan jumlah siswa kelas 6 adalah 23 orang, maka jumlah siswa yang diajar oleh guru tersebut ada sebanyak 25 + 24 + 23 = 72 orang siswa.

Contoh 2.3. Penelitian dilakukan terhadap matakuliah Analisis Real, Matematika Diskrit, dan Struktur Aljabar. Jumlah peserta matakuliah Analisis Real adalah 25 orang, jumlah peserta matakuliah Matematika Diskrit adalah 27 orang, dan jumlah peserta matakuliah Struktur Aljabar adalah 20 orang. Jumlah mahasiswa yang menjadi sampel dalam penelitian tersebut adalah 25 + 27 + 20 = 72 orang.

Contoh 2.4. Seorang mahasiswa akan membeli sebuah motor. Ia dapat memilih salah satu jenis dari tiga merk motor, Honda 3 pilihan, Suzuki 2 pilihan, dan Yamaha 2 pilihan. Dengan demikian, mahasiswa tersebut mempunyai mempunyai pilihan sebanyak 3 + 2 + 2 = 7 untuk membeli motor yang diinginkan.

Contoh 2.5. Karakter-karakter yang dapat bentuk dari suatu metik ketik standar terdiri atas delapan angka (angka 2 – angka 9), 26 huruf kapital, 26 huruf kecil, dan 24 tanda baca dan simbol khusus. Ada berapa jumlah karakter yang dapat diketik dengan mesin ketik tersebut? Berdasarkan aturan penjumlahan, jumlah karakter yang dapat disusun adalah $8+26+26+24=84$, tanpa pengulangan karakter.

Masalah seperti di atas mudah diselesaikan karena susunannya sederhana. Tetapi di dalam masalah-masalah yang lebih kompleks, penyelesaian dapat dilakukan dengan terlebih dulu memastikan apakah aturan penjumlahan dapat digunakan atau tidak. Jika aturan penjumlahan dapat digunakan, maka masalah yang ada dapat diuraikan atas bagian-bagian, menghitung kemungkinan pada setiap bagian, kemudian menjumlahkan hasilnya.

Untuk himpunan *A* dan *B,* digunakan simbol $A \cup B$ untuk menyatakan gabungan kedua himpunan tersebut. Untuk sebarang himpunan *S*, ukuran dari himpunan *S* dilambangkan dengan $|S|$. Jadi menurut aturan penjumlahan, jika himpunan *A* dan *B* yang saling lepas maka $|A \cup B| = |A| + |B|$. Untuk sebarang himpunan $A_1, A_2, \cdots, A_n$, notasi $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ atau $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n$ digunakan untuk menyatakan gabungan dari keseluruhan himpunan tersebut. Dengan demikian jika terdapat *n* himpunan yang saling lepas, maka ukuran (banyaknya anggota) dari himpunan gabungan yang dimaksud adalah

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n| \tag{2.3}$$

atau

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| \tag{2.4}$$

Contoh 2.6. Perpustakaan suatu universitas memiliki 40 judul koleksi buku teks bidang sosiologi dan 50 judul koleksi buku teks antropologi. Menurut aturan penjumlahan, seorang mahasiswa di universitas tersebut dapat memilih 90 buku teks sosiologi atau antropologi dari perpustakaan.

Contoh 2.7. Aturan penjumlahan dapat diterapkan dalam kasus dua tugas apabila tidak ada di antara kedua tugas tersebut tidak dapat dilakukan secara bersamaan. Misalkan seorang instruktur komputer yang memiliki 7 buku tentang C++, Java, dan Perl, dapat merekomendasikan salah satu dari 21 buku tersebut kepada seorang bimbingannya untuk mempelajari bahasa pemrograman C++ atau Java, atau Perl.

Contoh 2.8. Suatu tugas akhir mata kuliah komputer yang terdiri atas tiga proyek. Pilihan pertama 23 tugas, tugas kedua 15 tugas, dan tugas ketiga 19 tugas. Tidak ada tugas yang sama dalam ketiga bentuk tersebut. Ada berapa pilihan tugas yang dapat dipilih seorang mahasiswa?

Jawab. Seorang mahasiswa dapat memilih satu proyek dengan memilih salah satu dari proyek pertama, kedua, atau ketiga. Menurut aturan penjumlahan, ada 23 + 15 + 19 = 57 cara untuk menyelesaikan proyek tersebut.

Contoh 2.9. Dalam suatu program komputer, terdapat kode listing seperti di bawah ini. Tentukan nilai *k* dari hasil eksekusi program tersebut, jika $n_1, n_2, n_3, \cdots, n_m$ adalah bilangan-bilangan bulat positif.

```
k:=0
for i1  = 1 to n1
    k:=k+1
for i2  = 1 to n2
    k:=k+1
        ⋮
for im  =1 to nm
    k:=k+1
```

Jawab. Nilai awal dari *k* adalah nol. Diketahui bahwa blok kode program ini terdiri atas *m* loop. Setiap kali loop berpindah, nilai *k* bertambah 1. Untuk menentukan nilai *k* setelah program ini dieksekusi, maka kita harus memastikan berapa kali loop berpindah. Perhatikan bahwa terdapat n_1 cara untuk berpindah sampai ke loop ke-*i*. Karena loop hanya bisa berpindah satu kali maka menurut aturan jumlah, nilai akhir dari *k* adalah banyaknya cara berpindah dalam *m* loop yaitu $n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_m$.

Prinsip penjumlahan digunakan jika terdapat r_1 objek berbeda di dalam himpunan pertama, r_2 objek berbeda di dalam himpunan kedua, . . ., r_m objek berbeda di dalam himpunan ke-*m*, dana jika masing-masing himpunan ini saling lepas (disjoint), dan tidak ada dua di antara pekerjaan tersebut yang dapat dilakukan bersamaan maka banyaknya cara untuk memilih salah satu objek dari ke-*m* himpunan tersebut adalah $r_1 + r_2 + r_3 + \cdots + r_m$.

A.2. Aturan Penjumlahan Umum

Misalkan $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ adalah himpunan-himpunan berhingga yang disjoin satu dengan lainnya, maka

$$\left|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n\right| = \left|A_1\right| + \left|A_2\right| + \left|A_3\right| + \cdots + \left|A_n\right| \tag{2.5}$$

Bukti. Sebagaimana pembuktian prinsip penjumlahan sebelumnya, kedua sisi persamaan menunjukkan himpunan yang sama, yaitu himpunan $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n$ karena itu sisi kiri dan kanan memiliki anggota himpunan yang sama banyak.

Pernyataan di atas menekankan adanya *dua* himpunan berhingga yang disjoin, tetapi tidak ada hal istimewa dalam bilangan *dua* yang disebutkan di sini. Jika dimisalkan bahwa semua anggota tim pendaki gunung tidak dapat melanjutkan pendakian masing-masing dengan alasan yang berbeda, misalnya 5 orang berhenti karena kelelahan, 3 orang berhenti karena sepatunya rusak, 4 orang berhenti karena kehilangan jejak, kita masih tetap dapat menyimpulkan bahwa jumlah anggota tim tersebut ada sebanyak 5 + 3 + 4 = 12 orang. Kasus ini merupakan contoh penerapan Prinsip Penjumlahan Umum.

Dapat disimpulkan bahwa jika terdapat r_1 objek berbeda di dalam himpunan pertama, r_2 objek berbeda di dalam himpunan kedua, dan seterusnya, sampai r_n objek berbeda di dalam himpunan ke-*n* dan jika semua himpunan-himpunan tersebut disjoin satu sama lain, maka banyaknya cara memilih salah satu objek dari *n* himpunan tadi ada $r_1 + r_2 + r_3 + \cdots + r_n$.

A.3. Aturan Pengurangan

Jika suatu tugas dapat diselesaikan dalam n_1 cara atau n_2 cara, maka banyaknya cara menyelesaikan tugas tersebut adalah $n_1 + n_2$ dikurangi banyaknya cara menyelesaikan tugas dengan cara pertama yang juga termasuk cara kedua. Prinsip pengurangan ini dinamakan juga prinsip inklusi-eksklusi, yang secara khusus digunakan untuk menentukan banyaknya anggota himpunan dalam irisan dua himpunan. Misalkan A_1 dan A_2 adalah himpunan-himpunan, maka terdapat $\left|A_1\right|$ cara untuk memilih salah satu anggota himpunan A_1 dan $\left|A_2\right|$ cara untuk memilih salah satu anggota himpunan A_2. Banyaknya cara untuk memilih salah satu anggota himpunan A_1 atau himpunan A_2 yaitu banyaknya cara memilih salah satu anggota dari himpunan gabungnnya, sama dengan jumlah banyaknya cara memilih salah satu anggota himpunan A_1 dengan banyaknya cara memilih salah satu anggota himpunan A_2 dikurangi jumlah banyaknya cara memilih salah satu anggota himpunan A_1 yang juga merupakan anggota himpunan A_2. Karena ada $|A_1 \cup A_2|$ cara untuk memilih salah satu anggota himpunan A_1 atau A_2 dan $|A_1 \cap A_2|$ cara untuk memilih salah satu anggota himpunan bersama antara kedua himpunan tersebut, maka diperoleh

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| \tag{2.6}$$

Contoh 2.10. Ada berapa banyaknya string 8 bit yang diawali dengan bit 1 atau diakhiri dengan dua bit 00?

Jawab. Suatu bit string yang panjangnya 8 yang diawali dengan bit 1 dapat disusun dalam $1^1 2^7 = 128$ cara. Banyaknya cara tersebut diperoleh dari aturan perkalian, dimana bit pertama hanya dapat dipilih dalam satu cara (yaitu bit 1) sedangkan ketujuh bit lainnya masing-masing dapat dipilih dalam dua cara (yaitu 1 atau 0). Dengan cara yang sama, dapat ditentukan bahwa banyaknya cara menyusun string yang panjangnya 8 dan diakhiri dengan bit 00 dapat dilakukan dalam $2^6.1^2 = 64$ cara, karena masing-masing enam bit pertama dapat disusun dalam dua cara sedangkan dua bit terakhir hanya dapat disusun dalam satu cara.

Beberapa cara menyusun string 8 bit yang diawali dengan bit 1 adalah sama dengan cara menyusun string 8 bit yang diakhiri dengan bit 00. Susunan string seperti itu ada sebanyak $2^5 = 32$ cara sesuai dengan aturan perkalian karena bit pertama dapat disusun dalam satu cara saja, masing-masing bit kedua sampai bit keenam dapat disusun dalam dua cara, dan dua bit terakhir dapat disusun dalam satu cara. Akibatnya, jumlah string 8 bit yang diawali dengan bit 1 atau diakhiri dengan bit 00 adalah 128 + 64 – 32 = 160 cara.

Contoh 2.11. Suatu perusahaan komputer menerima 350 berkas lamaran dari lulusan ilmu komputer. Misalkan 220 pelamar menguasai pemrograman C++, 147 pelamar menguasai pemrograman Delphi, dan 51 pelamar menguasai pemrograman C++ dan juga Delphi. Ada berapa pelamar yang tidak menguasai pemrograman C++ dan juga tidak menguasai pemrograman Delphi?

Jawab. Untuk menentukan banyaknya pelamar yang tidak menguasai pemrograman C++ maupun Delphi maka digunakan prinsip pengurangan. Total pelamar dikurangi dengan banyaknya pelamar yang menguasai pemrograman C++ dan menguasai pemrograman Delphi. Misalkan A_1 adalah himpunan pelamar yang menguasai pemrograman C++ dan A_2 adalah himpunan pelamar yang menguasai pemrograman Delphi. Maka $A_1 \cup A_2$ adalah himpunan pelamar yang menguasai pemrograman C++ atau Delphi (atau kedua-duanya) dan $A_1 \cap A_2$ adalah himpunan pelamar yang menguasai pemrograman C++ dan Delphi. Berdasarkan aturan pengurangan, banyaknya pelamar yang menguasai pemrograman C++ atau Delphi (atau kedua-duanya) sama dengan:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| = 220 + 147 - 51 = 316.$$

Disimpulkan bahwa 350 – 316 = 34 pelamar tidak menguasai pemrograman C++ dan juga tidak menguasai pemrograman Delphi.

Masalah tim pendaki gunung yang telah disebutkan sebelumnya, dapat juga ditinjau dengan cara berbeda, misalnya sebagai berikut: Dua belas orang mahasiswa akan pergi mendaki gunung. Lima orang di antaranya berhenti dan tidak melanjutkan pendakian, sedangkan anggota tim lainnya berhasil menyelesaikan misi. Berapa orang anggota tim yang berhasil melanjutkan pendakian sampai ke puncak? Jawabannya adalah 12 – 5 = 7. Masalah dengan dua himpunan berhingga seperti ini, jika A adalah himpunan berhingga, dan $B \subseteq A$. Maka $|A - B| = |A| - |B|$. Kesamaan ini dapat dibuktikan melalui aturan penjumlahan. Menurut Aturan Penjumlahan, kesamaan tersebut adalah benar, karena A – B adalah himpunan yang disjoin, dan himpunan gabungannya adalah A. Dengan kata lain, kedua sisi dalam persamaan itu menyatakan banyaknya elemen himpunan A, tetapi sisi kiri menyatakan menyatakan banyaknya anggota himpunan yang tidak terdapat di B, kemudian menentukan banyaknya anggota himpunan yang ada di B. Dengan demikian, terbukti dengan mengurangkan $|B|$ dari kedua sisi persamaan $|A - B| = |A| - |B|$.

Contoh 2.12. Misalkan diketahui himpunan-himpunan $A = \{2,3,5,7\}$ dan $B = \{4,5,7\}$ maka $A - B = \{2,3\}$. Perhatikan bahwa A – B dapat terdefinisi bahkan meskipun B bukanlah himpunan bagian dari A. Meskipun demikian prinsip pengurangan berlaku hanya jika B merupakan himpunan bagian dari A. Untuk menyederhanakan pembahasan, maka diperkenalkan dua himpunan yang berbeda. Jika *A* dan *B* adalah dua himpunan, maka *A* –

B adalah himpunan yang terdiri atas anggota-anggota himpunan *A* yang bukan merupakan anggota himpunan *B*.

Pendekatan $B \subseteq A$ sangat penting dalam kasus ini. Mahasiswa dapat membuktikan bahwa prinsip pengurangan tidak berlaku pada himpunan-himpunan A dan B di dalam Contoh 2.12. Misalkan pada kasus lain, A adalah himpunan semua bilangan bulat positif satu digit yang merupakan kelipatan 2, dan B adalah himpunan semua bilangan bulat positif satu digit yang merupakan kelipatan 3. Dengan demikain dapat diketahui bahwa $A = \{2,4,6,8\}$ sehingga $|A| = 4$ dan $B = \{3,6,9\}$ sehingga $|B| = 3$. Jadi $|A| - |B| = 4 - 3 = 1$ dan $|A - B| = |\{2,4,8\}| = 3$. Tetapi karena $4 - 3 \neq 3$ maka jelas bahwa prinsip pengurangan tidak berlaku dalam kasus ini. Dari contoh ini terlihat bahwa prinsip pengurangan tidak terpenuhi karena B bukanlah himpunan bagian dari A.

Contoh 2.13. Buktikan bahwa banyaknya bilangan bulat positif yang kurang atau sama dengan 1000 yang memiliki setidak-tidaknya dua digit berbeda adalah 1000 – 27 = 973.

Bukti: Misalkan A adalah himpunan semua bilangan bulat positif yang kurang atau sama dengan 1000, dan misalkan B adalah himpunan bagian dari A yang terdiri atas semua bilangan bulat positif yang kurang atau sama dengan 1000, yang tidak memiliki dua digit berbeda. Dapat diklaim bahwa $|A - B|$ = 973. Berdasarkan Prinsip Pengurangan, diketahui bahwa $|A - B| = |A| - |B|$. Selanjutnya diketahui juga bahwa $|A| = 1000$. Bukti dari perntanyaan di atas dapat ditemukan jika dapat ditunjukkan bahwa $|B| = 27$. Apa saja anggota himpunan B? Anggota himpunan B adalah semua bilangan bulat positif yang memiliki sebanyak-banyaknya tiga digit yang tidak memiliki dua digit yang berbeda. Termasuk di dalam himpunan ini adalah sebarang anggota himpunan B yang hanya terdiri dari satu digit, atau yang salah satu digitnya berulang satu kali, dua kali, atau tiga kali. Jadi anggota himpunan B adalah 1, 2, 3, . . ., 9, 11, 22, 33, . . ., 99, dan 111, 222, . . ., 999. Jumlah dari semua anggota himpunan B adalah 27, yang membuktikan klaim tersebut di atas. Menggunakan Prinsip Pengurangan akan menyederhanakan perhitungan karena $|A|$ mudah dihitung sehingga $|B|$ juga akan lebih mudah dihitung. Karena itu, menghitung $|A| - |B|$ lebih cepat dilakukan dari pada menghitung $|A - B|$ secara langsung.

A.4. Aturan Perkalian

Misalkan *X* dan *Y* adalah dua himpunan berhingga. Maka banyaknya pasangan berurutan (x, y) yang memenuhi $x \in X$ dan $y \in Y$ adalah $|X| \cdot |Y|$ yang sering dinyatakan dalam bentuk $n(X) \cdot n(Y)$.

Bukti. Ada $|X|$ pilihan untuk elemen pertama dari pasangan (x, y), dan selanjutnya tanpa memperhatikan pilihan apapun untuk *x*, terdapat $|Y|$ pilihan untuk *y*. Setiap pilihan *x* dapat dipasangkan dengan setiap pilihan dari *y*, sehingga dengan demikian pernyataan tersebut di atas terbukti.

Dapat dilihat bahwa himpunan semua pasangan berurutan (x, y) sedemikian sehingga $x \in X$ dan $y \in Y$ dinamakan hasilkali langsung atau hasilkali Cartesian antara *X* dan *Y*, dan sering dilambangkan dengan XY. Pasangan (x, y) dinamakan pasangan berurutan karena urutan letak kedua anggotanya diperhatikan, artinya $(x, y) \neq (y, x)$. Misalkan suatu prosedur dapat dipilah menjadi dua tugas. Jika terdapat n_1 cara untuk melakukan tugas pertama, dan untuk setiap cara melakukan tugas pertama ini, terdapat n_2 cara untuk melaksanakan tugas kedua, maka terdapat $n_1 n_2$ cara untuk menyelesaikan prosedur tersebut.

Contoh 2.14. Jika huruf-huruf dalam kata KOMPUTER dapat digunakan berulang, maka banyaknya susunan 12 huruf adalah $8^{12} \approx 6.872 \times 10^{10.}$

Contoh 2.15. Berapa banyak string yang terdiri atas 7 karakter, yang dapat dibentuk dari dua bit (angka 0 dan 1).

Jawab. Setiap satuan string terdiri atas dua pilihan, yaitu 0 atau 1. Dengan demikian, string yang terdiri atas 7 karakter dapat disusun dalam $2^7 = 128$ cara.

Contoh 2.16. Seorang dosen mengajar mata kuliah matematika diskrit, aljabar, dan trigonometri. Jumlah peserta mata kuliah matematika diskrit adalah 20 orang, peserta mata kuliah aljabar adalah 25 orang, dan jumlah peserta mata kuliah trigonometri adalah 30 orang. Jika dosen tersebut akan memilih tiga orang mahasiswa yang masing-masing satu orang mewakili peserta mata kuliah, maka dosen tersebut dapat memilih mahasiswa dalam 20 x 25 x 30 = 15.000 cara.

Contoh 2.17. Berapa banyak bilangan ganjil yang terletak antara 1000 dan 9999, jika (a) semua angkanya berbeda, dan (b) angkanya boleh berulang?

Jawab:

(a) Jika semua angkanya berbeda, maka:
- posisi satuan terdiri atas 5 kemungkinan yaitu 1, 3, 5, 7, dan 9,
- posisi ribuan terdiri atas 8 kemungkian yaitu 1 sampai dengan 9,
- posisi ratusan terdiri atas 8 kemungkinan yaitu 0 sampai dengan 9, kecuali dua angka yang telah digunakan pada posisi satuan dan ribuan, dan
- posisi puluhan terdiri atas 7 kemungkinan yaitu 0 sampai 9, kecuali tiga angka yang telah digunakan pada posisi satuan, ribuan, dan puluhan.

Jadi banyaknya bilangan ganjil yang terletak antara 1000 dan 9999 jika semua angkanya berbeda adalah (5)(8)(8)(7) = 2240.

(b) Jika angkanya boleh berulang, maka:
- posisi satuan terdiri atas 5 kemungkinan yaitu 1, 3, 5, 7, dan 9,
- posisi ribuan terdiri atas 9 kemungkian yaitu 1 sampai dengan 9,
- posisi ratusan terdiri atas 10 kemungkinan yaitu 0 sampai dengan 9, dan
- posisi puluhan terdiri atas 10 kemungkinan yaitu 0 sampai 9.

Jadi banyaknya bilangan ganjil yang terletak antara 1000 dan 9999 jika angkanya boleh berulang adalah (5)(9)(10)(10) = 4500.

Teorema 2.1. Misalkan A adalah suatu himpunan yang akan dihitung jumlah anggotanya. Andaikan terdapat himpunan bagian A_1 sehingga untuk setiap anggota himpunan A_1, terdapat himpunan bagian A_2 sedemikian sehingga setiap anggota himpunan A dapat dicirikan secara unik dengan pasangan anggota himpunan A_1 dan A_2, dan untuk setiap anggota himpunan A_1, jumlah pasangannya di A_2, selalu tetap yaitu $|A_2|$, maka, $|A| = |A_1||A_2|$.

Suatu dealer mobil memasarkan lima jenis model, dan setiap model tersedia dalam tujuh warna yang berbeda. Jika seorang calon pembeli hanya tertarik pada model dan warna mobil, maka dapat ditentukan ada berapa cara pembeli tersebut memilih mobil yang akan dibeli.

Misalkan kelima model dilambangkan dengan huruf-huruf *A*, *B*, *C*, *D*, dan *E*, dan warna mobilnya dilambangkan dengan angka-angka 1, 2, 3, 4, 5, 6, dan 7. Masing-masing pilihan dapat dinyatakan sebagai suatu pasangan satu huruf dan satu angka tadi. Pada Tabel 1 di bawah ini, baris menunjukkan model dan kolom menyatakan warna mobil. Total pilihan pembeli ada sebanyak 5 x 7 = 35.

Tabel 1. Pilihan untuk lima model dan tujuh warna mobil

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
A	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7
B	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7
C	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
D	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7
E	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7

Contoh 2.18. Buktikan bahwa untuk sebarang bilangan bulat positif *k*, banyaknya bilangan bulat positif yang terdiri atas *k*-digit adalah 9.10^{k-1}.

Bukti: Suatu bilangan bulat positif *k*-digit adalah $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_k)$ dengan x_i adalah digit ke-*i* dalam bilangan bulat yang dimaksud. Jadi x_1 berasal dari $X_1 = \{1, 2, \cdots, 9\}$ sedangkan x_i berasal dari $X_i = \{0, 1, 2, \cdots, 9\}$ untuk $2 \le i \le k$. Oleh karena itu, $|X_1| = 9$ dan $|X_i| = 10$ untuk $2 \le i \le k$.

Contoh 2.19. Buktikan bahwa banyaknya bilangan bulat positif 2-digit ada 90.

Jawab: Suatu bilangan bulat positif yang terdiri atas dua digit adalah pasangan berurutan (*x*, *y*), dengan *x* adalah digit pertama sedangkan *y* adalah digit kedua. Perhatikan bahwa *x* berasal dari himpunan $X = \{1, 2, \cdots, 9\}$, dan *y* berasal dari himpunan $Y = \{0, 1, 2, \cdots, 9\}$. Dengan demikian $|X| = 9$ dan $|Y| = 10$. Berdasarkan Teorema 2.1, banyaknya pasangan berurutan (x, y) yang dimaksudkan di atas ada $|X| \text{x} |Y| = 9 \text{x} 10 = 90.$

Contoh 2.20. Ada berapa bilangan bulat positif 4-digit yang diawali dan diakhiri angka-angka genap?

Jawab: Digit pertama harus berasal dari himpunan yang terdiri atas 4-anggota himpuan yaitu $\{2,4,6,8\}$ dan digit terakhir berasal dari himpunan yang terdiri atas 5-anggota himpunan yaitu $\{0,2,4,6,8\}$. Digit kedua dan ketiga berasal dari himpunan dengan 10 anggota himpunan yaitu $\{0,1,2,\cdots,9\}$. Oleh karena itu, banyaknya bilangan bulat positif yang memenuhi sifat tersebut di atas ada 4.10.10.5 = 2000 bilangan.

Contoh 2.21. Mahasiswa program studi matematika akan memilih ketua dan sekretaris dalam rangka pelaksanaan seminar nasional. Jika disepakati bahwa ketua dipilih dari 8 orang laki-laki dan sekretaris dipilih dari 6 orang wanita, maka berdasarkan aturan perkalian, banyaknya cara yang mungkin dalam menetapkan pasangan ketua dan sekretaris adalah 8 x 6 = 48 cara.

Contoh 2.22. Nomor kode peserta tes penerimaan mahasiswa baru terdiri atas dua huruf diikuti empat angka.

a) Jika huruf dan angka tidak berulang di dalam nomor kode tersebut, maka ada 26 x 25 x 10 x 9 x 8 x 7 = 3.276.000 kode yang dapat disusun.
b) Jika huruf dan angka boleh berulang, maka ada 26 x 26 x 10 x 10 x 10 x 10 = 6.760.000 nomor kode yang dapat disusun.
c) Jika huruf dan angka boleh berulang seperti pada bagian (b), ada berapa nomor kode yang hanya menggunakan huruf vokal dan bilangan genap?

Contoh 2.23. Untuk menyimpan data, memori utama dari suatu komputer disusun dari sejumlah besar rangkaian. Masing-masing rangkaian dapat menyimpan data satu *bit* – yaitu salah satu dari kode biner 0 atau 1. Rangkaian penyimpanan data tersebut tersusun dalam suatu unit yang disebut sel memori. Untuk mengidentifikasi sel tersebut di dalam memori utama suatu komputer, masing-masing sel ditandai dengan nama unik yang dinamakan *address*. Untuk beberapa komputer seperti mikrokontroller, address dinyatakan dalam bentuk susunan delapan bit yang secara kolektif dinamakan *byte*. Berdasarkan aturan perkalian, dapat diketahui bahwa ada 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 = 2^8 = 256 byte. Jadi ada 256 address yang dapat digunakan oleh sel untuk menyimpan data atau informasi tertentu.

Peralatan rumah tangga seperti oven microwave menggunakan chip mikrokontroller untuk mengendalikan tempertatur di dalamnya. “Komputer-komputer kecil” tersebut mengandung ribuan sel memori dan menggunakan dua address dua-byte untuk mengidentifikasi sel-sel yang ada di dalam memori utama. Address seperti itu tersusun atas dua byte berturut-turut, atau 16 bit berturut-turut. Jadi ada 256 x 256 = 2^8 x 2^8 = 2^{16} = 65.536 address yang dapat digunakan untuk mengidentifikasi sel-sel di memori utama.

Perangkat komputer tertentu menggunakan sistem address 4 byte. Sistem address 32 bit seperti ini digunakan untuk merancang arsitektur processor Pentium yang terdiri atas 2^8 x 2^8 x 2^8 x 2^8 = 2^{32} = 4.294.967.296 address untuk mengidentifikasi sel-sel di memori utama. Processor Itanium, menggunakan address 8 byte yang terdiri atas 2^{64} = 18.446.744.073.709.551.616 address untuk mengidentifikasi sel-sel di memori utama. Semakin tinggi address yang digunakan, semakin besar kapasitas data dan informasi yang dapat tersimpan pada sistem komputer tersebut.

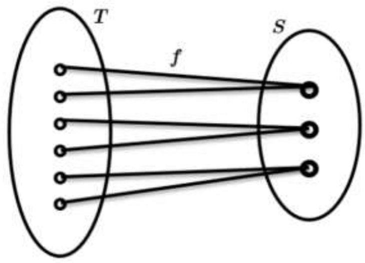
A.5. Aturan Pembagian

Misalkan sejumlah keluarga diundang ke suatu pesta anak-anak. Setiap keluarga datang dengan membawa dua anak. Di pesta tersebut, anak-anak bermain di ruangan tertentu sementara petugas jaga mengawasi mereka. Jika seorang pengunjung melihat ke ruang bermain anak-anak, dapatkan pengunjung tersebut mengetahui berapa jumlah keluarga di pesta tersebut?

Jawaban terhadap pertanyaan ini tidak sulit. Pengunjung tersebut dapat menghitung jumlah anak di ruang bermain kemudian membagi jumlahnya dengan dua. Di dalam masalah ini digunakan teknik menghitung yang sangat umum. Jika kita akan menghitung banyaknya anggota dari himpunan tertentu, misalnya *S*, seringkali lebih mudah menghitung banyaknya anggota dari himpunan lain misalnya *T,* sehingga setiap anggota himpunan *S* yang berkaitan dengan *d* anggota dari *T*, dimana setiap anggota himpunan *T* berhubungan dengan salah satu anggota himpunan *S*. Relasi antara himpunan *T* dan *S* dijelaskan melalui Definisi 2.2 di bawah ini.

Definisi 2.2. Misalkan *S* dan *T* adalah himpunan-himpunan berhingga, dan misalkan *d* adalah suatu bilangan bulat tetap. Fungsi $f : T \to S$ merupakan pemetaan *d*-ke-satu jika untuk setiap anggota himpunan $s \in S$ terdapat dengan tepat *d* anggota himpunan $t \in T$

sehingga $f(t)=s$. Ingat bahwa fakta *f* adalah fungsi yang secara otomatis menjamin bahwa $f(t)$ adalah unik untuk setiap $t \in T$.



Gambar 2.1. Pemetaan $f : T \to S$

Teorema 2.2 Prinsip Pembagian.

Misalkan *S* dan *T* adalah himpunan-himpunan berhingga sehingga terdapat suatu fungsi *d*-ke-1 $f : T \to S$. Maka

$$|S| = \frac{|T|}{d} \tag{2.7}$$

Bukti. Hal ini merupakan konsekuensi langsung dari Definisi 2.2.

Menurut aturan pembagian, terdapat *n*/*d* cara untuk melakukan suatu tugas jika tugas tersebut dapat dijalankan melalui suatu prosedur yang dapat dilakukan dalam *n* cara, dan untuk setiap cara *w*, terdapat tepat *d* dari *n* cara yang berkorespondensi dengan cara *w*.

Dengan kata lain aturan pembagian dapat dinyatakan dalam bentuk himpunan sebagai berikut: *Jika himpunan berhingaa A adalah gabungan dari n subset-subset yang saling lepas yang masing-masing memiliki d anggota, maka* $n = |A|/d$. Aturan pembagian ini juga dapat dinyatakan sebagai fungsi: *Jika f adalah suatu fungsi dari A ke B dimana A dan B adalah himpunan-himpunan berhingga, dan bahwa untuk setiap nilai* $y \in B$ *terdapat tepat d nilai* $x \in A$ *sedemikian sehingga* $f(x) = y$ (*artinya fungsi f bersifat d-ke-satu*), *maka* $|B| = |A|/d$.

Contoh 2.24. Berapa kemungkinan bahwa 30 orang mahasiswa peserta matakuliah matematika diskrit lahir pada tanggal yang berbeda?

Jawab. Asumsikan bahwa selama 365 hari dalam satu tahun, selalu terdapat *satu* bayi yang lahir. Jika banyaknya cara menentukan tanggal kelahiran 30 orang dalam satu tahun adalah N dan setiap tanggal kelahiran yang berbeda, dinyatakan dengan D. Banyaknya kemungkinan bahwa ke-30 orang mahasiswa lahir pada tanggal yang berbeda adalah D/N.

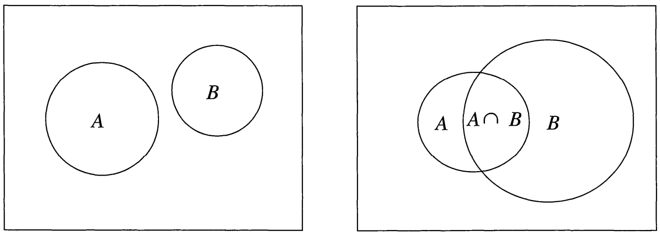
Contoh 2.25. Banyaknya permutasi dari huruf-huruf di dalam kata KOMPUTER adalah 8!. Jika hanya 5 dari huruf tersebut yang digunakan maka banyaknya permutasi adalah $P(8,5) = 8!/(8-5)! = 8!/3! = 6720$.

Contoh 2.26. Ada berapa cara berbeda untuk mendudukkan empat orang mengelilingi satu meja, dimana dua tempat duduk dianggap sama jika setiap posisi duduk seseorang diapit oleh orang yang sama dengan posisi awal?

Jawab. Misalkan dipilih sebarang tempat duduk dan menandai tempat tersebut dengan kursi 1. Tempat duduk lainnya ditandai juga dengan kursi 2, 3, dan 4 berturut-turut searah jarum jam. Perhatikan bahwa ada 4 cara memilih orang untuk duduk di kursi 1, tiga cara untuk memilih orang yang akan duduk di kursi 2, dua cara untuk memilih orang yang akan duduk di kursi 3, dan satu cara untuk memilih orang yang akan duduk di kursi 4. Jadi ada $4! = 24$ cara untuk menyusun keempat orang tersebut pada kursi-kursi yang disiapkan. Namun demikian, dari empat pilihan untuk duduk di kursi 1 akan menghasilkan posisi duduk yang sama karena hanya ada dua susunan yang berbeda jika seseorang diapit oleh dua orang yang sama dengan posisi awal. Karena ada empat cara untuk memilih orang yang akan duduk di kursi 1, maka menurut aturan pembagian, terdapat $24/4 = 6$ susunan duduk yang berbeda dari empat orang mengelilingi meja tersebut.

Aturan dasar di dalam kombinatorika akan memberi petunjuk cara menghitung sekumpulan susunan yang memenuhi syarat tertentu atau yang berada di dalam sekumpulan susunan yang terbentuk dari beberapa kumpulan lainnya. Misalkan terdapat dua himpunan benda A dan B (objek dapat berupa susunan dari beberapa objek lainnya). Gabungan dari kedua himpunan tersebut, $A \cup B$, yang didefinisikan sebagai $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ atau } x \in B\}$, adalah himpunan benda yang terdapat di A atau di B, atau di A dan B. Sedangkan irisan kedua himpunan tersebut, yang didefinisikan $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ dan } x \in B\}$ adalah himpunan benda-benda di A dan B. Dapat dikatakan bahwa aturan paling sederhana dari "prinsip pencacahan" adalah gabungan dua himpunan yang tidak memiliki irisan. Himpunan seperti ini dinamakan himpunan saling lepas (disjoint). Aturan penjumlahan menyatakan bahwa "*banyaknya elemen di dalam gabungan* *dari suatu kumpulan berhingga himpunan-himpunan yang saling lepas adalah jumlah dari banyaknya elemen di dalam masing-masing himpunan tersebut.*

Gambar 2.2 menyatakan himpuan A dan B sebagai himpunan bagian dari suatu himpunan semesta. Aturan penjumlahan berlaku pada himpunan yang saling lepas, tetapi tidak berlaku pada himpunan-himpunan yang beririsan. Jika himpunan tersebut beririsan, ukuran $A \cup B$ bukanlah jumlah dari elemen *A* dan *B*.



Gambar 2.2. Himpunan A dan B yang disjoint dan beririsan

Jika suatu himpunan A terdiri atas himpunan bagian $A_1, A_2, \cdots, A_n$ maka jumlah unsur pada himpunan A akan sama dengan jumlah semua unsur yang ada pada setiap himpunan bagian $A_1, A_2, \cdots, A_n$. Secara tidak langsung, pada prinsip penjumlahan, setiap himpunan bagian $A_1, A_2, \cdots, A_n$ tidak saling tumpang tindih (saling lepas). Untuk himpunan yang saling tumpang tindih tidak berlaku lagi prinsip penjumlahan, dan ini harus diselesaikan dengan prinsip inklusi-eksklusi yang akan dibahas kemudian.

Contoh 2.27. Berbeda dengan Contoh 2.25 dan Contoh 2.26, banyaknya susunan huruf-huruf dari kata BALL ada 12, bukan 4! (= 24). Alasannya adalah bahwa kata BALL tidak terdiri atas 4 huruf yang berbeda, melainkan 4 huruf yang terdiri atas tiga huruf berbeda, dan satu huruf berulang.

Contoh 2.28. Dengan menggunakan Contoh 2.27, dapat diketahui banyaknya susunan 9 huruf dalam kata DATABASES. Pada kata tersebut ada 1 huruf D, 3 huruf A, 1 huruf T, 1 huruf B, 1 huruf E, dan 2 huruf S. dengan demikian akan diperoleh 3! = 6 susunan kata dengan huruf-huruf A yang dibedakan dengan kode indeks. Demikian juga, untuk dua huruf S diperoleh 2! = 2 susunan kata dengan S yang dibedakan dengan kode indeks. Karena itu banyaknya permutasi yang dapat disusun dari kata $DA_1TA_2BA_3S_1ES_2$ adalah

(2!)(3!). Jadi banyaknya susunan yang dapat dibuat dari kata DATABASES adalah 9!/(2!.3!) = 30.240.

Dari Contoh 2.25 - 2.27 dapat disimpulkan bahwa jika terdapat *n* objek yang terdiri atas n_1 objek tipe pertama, n_2 objek tipe kedua, … , dan n_r objek tipe ke-*r*, dimana $n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_r = n$ maka banyaknya susunan yang dapat dibentuk dari *n* objek adalah $\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$.

Aturan perkalian menyatakan bahwa himpunan gabungan dari *m* himpunan saling lepas yang masing-masing memiliki *n* anggota akan memiliki *m* x *n* anggota. Pernyataan ini dapat dibuktikan dengan menggunakan prinsip penjumlahan seperti yang dilakukan pada beberapa contoh yang telah ditunjukkan. Tetapi pendekatan yang lebih konkrit mengenai aturan perkalian adalah sebagai berikut: jika terdapat *m* orang anggota yang masing-masing dapat mencalonkan diri sebagai ketua dan masing-masing dapat berpasangan dengan *n* anggota lainnya sebagai calon sekretaris, maka banyaknya pasangan cara menyusun calon ketua dan sekretaris adalah *m* x *n*.

Prinsip perkalian digunakan untuk melakukan suatu pekerjaan yang terdiri atas *m* prosedur berurutan. Misalkan ada r_1 kemungkinan prosedur pada tahapan pertama, ada r_2 kemungkinan prosedur pada tahapan kedua, . . . , ada r_m kemungkinan prosedur pada tahapan ke-*m*. Jika banyaknya kemungkinan pada masing-masing tahapan tidak tergantung pada pilihan yang diambil pada tahapan sebelumnya, dan jika semua kemungkinan tersebut berbeda, maka total prosedur yang dapat dilakukan adalah $r_1 r_2 r_3 \cdots r_m$. Prinsip perkalian dipergunakan apabila suatu pekerjaan terdiri atas beberapa kelompok atau tahap yang terpisah satu sama lainnya. Dengan kata lain prinsip perkalian digunakan untuk menyelesaikan pekerjaan yang tidak dapat diselesaikan secara bersamaan, melainkan haru diselesaikan tahapan demi tahapan. Setiap tahap dapat dilakukan dengan beberapa cara, dan setiap tahap dilanjutkan pada tahap berikutnya, yang juga terdiri atas beberapa pilihan. Dengan demikian keseluruhan pilihan yang mungkin dapat dilakukan untuk menyelesaikan pekerjaan tersebut merupakan hasil kali dari banyaknya pilihan pada suatu tahap dengan tahap lainnya.

Contoh 2.29. Misalkan suatu kelompok mahasiswa memiliki 15 orang anggota, akan memilih seorang ketua dan seorang sekretaris. Ada berapa cara yang dapat dilakukan untuk memilih ketua dan sekretaris?

Untuk menyelesaikan masalah di atas, cara yang dapat dilakukan adalah menyusun daftar dua nama sebagai calon ketua dan sekretaris. Banyaknya daftar pasangan calon ketua dan sekretaris yang dapat disusun dari semua nama anggota adalah jawaban yang diinginkan dalam persoalan ini. Diketahui, banyaknya daftar pasangan ada $15 \times 14 = 210$. Banyaknya daftar pasangan yang mungkin adalah dengan mengandaikan bahwa masing-masing anggota memiliki peluang yang sama untuk terpilih sebagai ketua atau sekretaris. Jika seorang anggota mencalonkan diri sebagai ketua, maka ada 14 anggota lain yang dapat terpilih sebagai sekretaris. Calon ketua tidak dapat lagi dicalonkan sebagai calon sekretaris, demikian sebaliknya. Hal yang sama berlaku juga untuk anggota lainnya. Karena ada 15 orang anggota yang masing-masing mencalonkan diri sebagai ketua dan masing-masing memiliki daftar nama 14 orang calon sekretaris, maka banyaknya daftar pasangan calon ketua dan sekretaris adalah $15 \times 14 = 210$.

Misalkan sebuah prosedur dapat dipecah dalam dua penugasan. Penugasan pertama dapat dilakukan dalam n_1 cara, dan tugas kedua dapat dilakukan dalam n_2 cara setelah tugas pertama dilakukan. Dengan demikian, dalam mengerjakan prosedur tersebut ada $(n_1.n_2)$ cara. Pada prinsip perkalian, bisa terjadi saling tumpang tindih (tidak saling lepas).

Contoh 2.30. Ada berapa pelat nomor polisi yang dapat dibuat jika setiap pelat terdiri atas tiga huruf diikuti dengan dua angka?

Jawab. Ada 26 pilihan untuk masing-masing huruf di depan, dan 10 pilihan untuk dua angka di belakangnya. Jadi, ada $(26)^3(10)^2$ = 1.757.600 pelat nomor polisi yang dapat dibuat. Jika huruf dan angka tidak boleh berulang pada pelat nomor polisi tersebut, maka ada (26)(25)(24)(10)(9) = 1.404.000 pelat. Dengan kata lain, banyaknya pelat nomor polisi yang mengandung huruf dan angka berulang adalah 1.757.600 - 1.404.000 = 353.600 pelat.

Contoh 2.31. Pada suatu rak buku, tersedia 5 buku berbahasa Spanyol, 6 buku berbahasa Perancis, dan 8 berbahasa Jerman. Ada berapa cara mengambil dua buku dalam bahasa berbeda?

Jawab.

- Ada (5)(6) = 30 cara mengambil satu buku berbahasa Spanyol dan satu buku berbahasa Perancis,
- Ada (5)(8) = 40 cara mengambil satu buku berbahasa Spanyol dan satu buku berbahasa Jerman, dan
- Ada (6)(8) = 48 cara mengambil satu buku berbahasa Perancis dan satu buku berbahasa Jerman.

Dengan demikian, banyaknya cara memilih dua buku dalam bahasa berbeda ada 30 + 40 + 48 = 118 cara.

Contoh 2.32. Jika diketahui angka-angka yang tersedia adalah 1, 3, 6, 7, 8, 9, maka:

(a) Ada berapa bilangan berdigit 4 yang dapat dibuat jika angka tersebut boleh berulang?
(b) Ada berapa banyaknya bilangan tersebut yang kurang dari 7000?
(c) Ada berapa bilangan genap?
(d) Berapa banyaknya bilangan dalam (a) – (c) jika angka tidak berulang?

Jawab.
Jika angka boleh berulang:

(a) $6^4 = 1296$. (b). $3(6^3) = 648$ (c). $2(6^3) = 432$.

(d) Jika angka tidak berulang:

(a) (6)(5)(4)(3) (c). (3)(5)(4)(3) (c). (2)(5)(4)(3)

Contoh 2.33. Setiap operator pada suatu jaringan komputer memiliki password yang panjangnya 6 sampai 8 karakter. Masing-masing password hanya menggunakan huruf kapital dan terdiri atas setidak-tidaknya satu angka. Ada berapa kemungkinan password yang ada?

Jawab. Misalkan P adalah banyaknya kemungkinan susunan password, dan P_i adalah banyaknya password yang panjangnya i karakter. Dengan demikian, $\mathrm{P} = \mathrm{P}_6 + \mathrm{P}_7 + \mathrm{P}_8$. Untuk menghitung P_6 maka harus dihitung banyaknya kemungkinan susunan password yang terdiri atas 6 karakter tanpa menggunakan angka, yaitu 26^6 = 308.915.776, kemudian dikurangkan dari banyaknya kemungkinan susunan password yang menggunakan huruf maupun angka, yaitu 36^6 = 2.176.782.336. Jadi, $P_6 = 36^6 - 26^6 = 2.612.282.842.880$. dengan cara yang sama, diketahui $P_7 = 36^7 - 26^7$ dan $P_8 = 36^8 - 26^8$. Akhirnya diketahui ada $P = 2.684.483.063.360$ kemungkinan susunan password.

Contoh 2.34. Berapa banyak string dengan panjang tujuh yang mungkin terbentuk dari dua bit (0 dan 1)?

Jawab. Setiap suku pada string tersebut mempunyai dua cara pemilihan, yaitu 0 atau 1. Dengan demikian, pada pemilihan string dengan panjang tujuah dapat dilakukan dengan: $2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 = 2^7 = 128$ cara.

Contoh 2.35. Seorang dosen mengajarkan matakuliah Analisis Real, Matematika Diskrit, dan Struktur Aljabar. Jika jumlah peserta matakuliah Analisis Real adalah 25 orang, jumlah peserta matakuliah Matematika Diskrit adalah 27 orang, dan jumlah peserta matakuliah Struktur Aljabar adalah 20 orang. Jika dosen tersebut ingin memilih tiga orang mahasiswa mengikuti olimpiade matematika, dimana seorang mahasiswa dari setiap matakuliah yang diajarkannya, maka dosen tersebut mempunyai 25 x 27 x 20 = 13.500 cara memilih susunan tiga mahasiswa tersebut.

Contoh 2.36. *Password* suatu login pada sistem komputer panjangnya lima sampai tujuh karakter. Tiap karakter boleh berupa huruf (huruf besar dan huruf kecil tidak dibedakan) atau angka. Berapa banyak *password* yang dapat dibuat untuk suatu login?

Jawab: Banyaknya huruf alfabet adalah 26 (A – Z) dan banyak angka adalah 10 (0 – 9), jadi seluruhnya 36 karakter.

Jumlah kemungkinan susunan *password* dengan panjang 5 karakter adalah

$$(36)(36)(36)(36)(36) = (36)^5 = 60.466.176.$$

Jumlah kemungkinan susunan *password* dengan panjang 6 karakter adalah

$$(36)(36)(36)(36)(36)(36) = (36)^6 = 2.176.782.336$$

Jumlah kemungkinan susunan *password* dengan panjang 7 karakter adalah

$$(36)(36)(36)(36)(36)(36)(36) = (36)^7 = 78.364.164.096$$

Jumlah seluruh *password* yang dapat disusun adalah

$$60.466.176 + 2.176.782.336 + 78.364.164.096 = 80.601.412.608 .$$

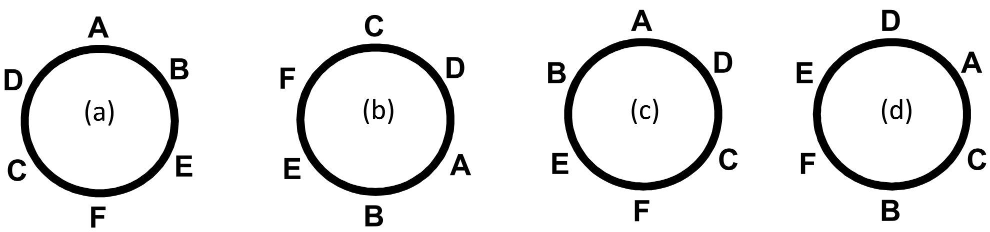
Jadi, untuk suatu login pada sistem komputer tersebut akan mempunyai 80.601.412.608 buah kemungkinan *password*. Jika setiap password diketik selama 1 detik maka diperlukan 2591 tahun untuk menemukan password yang tepat.

Bentuk umum dari aturan perkalian dapat dinyatakan sebagai berikut: *Jika daftar di dalam himpunan S yang terdiri atas k anggota, memiliki sifat-sifat sebagai berikut:*

(1) *Terdapat* m_1 *elemen pertama yang berbeda dalam himpunan S.*

(2) *Untuk setiap cara menyusun* $i-1$ *elemen pertama dalam daftar, terdapat* m_i *cara menyusun elemen* $ke-i$ *pada daftar tersebut, maka himpunan S terdiri atas* $m_1.m_2.\cdots.m_k$ *daftar.*

Contoh 2.37. Jika enam orang yaitu A, B, C, D, E, F, duduk mengelilingi suatu meja bundar, ada berapa banyak susunan keliling yang mungkin, jika susunan duduk dianggap sama jika semua orang berpindah dalam arah yang sama secara bersama-sama? Pada gambar di bawah ini, (a) dan (b) dianggap sama, sedangkan (b), (c), dan (d) dianggap berbeda.



Gambar 2.3. Susunan enam orang mengelilingi meja

Contoh 2.38. Misalkan tiga buah dadu (merah, biru, hijau) dilemparkan di atas meja. Jika setiap angka yang muncul dari ketiga butir dadu tersebut diperhatikan, ada berapa cara berbeda munculnya mata dadu tersebut?

Jawab. Karena ada tiga dadu yang dilempar dan masing-masing dadu bersisi enam, maka banyaknya cara kemunculan angka dadu ada sebanyak 6^3 kemungkinan.

Contoh 2.39. Ada berapa banyaknya bilangan 3-digit yang dapat dibagi 7?

Jawab.

Dari bilangan 3-digit,

$100, 101, \cdots, 111, 112, \cdots, 994, 995, \cdots, 999,$

Bilangan-bilangan

$105, 112, \cdots, 700, 707, 714, \cdots, 994$

Dapat dibagi 7, karena

$$105 = 7(15), \qquad 112 = 7(16), \qquad \cdots 700 = 7(100),$$
$$707 = 7(101), \qquad 714 = 7(102), \qquad \cdots 994 = 7(142)$$

Dengan demikian diketahui bahwa ada hubungan antara bilangan-bilangan kelipatan 7 dengan bilangan-bilangan 15, 16, …, 101, 102, …,142. Jadi banyaknya bilangan 3-digit yang dapat dibagi 7 sama dengan 15 sampai dengan 142. Dalam hal ini, terdapat 142 – 15 + 1 = 128 bilangan 3-digit kelipatan 7.

Contoh 2.40. Pada suatu acara makan malam, seorang tamu dapat memilih 4 menu makanan pembuka, dan 2 pilihan makanan penutup. Ada berapa menu yang dapat dipilih oleh tamu tersebut?

Jawab. Banyaknya menu pilihan pembuka dan penutup adalah 4 x 2 = 8 pilihan.

Dalam kehidupan sehari-hari sering dijumpai masalah yang berhubungan dengan kombinatorika, misalnya ada berapa cara yang dapat dilakukan untuk menyelesaikan tugas tertentu. Pada hampir sebagian besar kasus, membuat daftar dan mencacah kemungkinan cara penyelesaian masalah bukan pilihan yang tepat khususnya jika terdapat banyak cara penyelesaian yang dapat ditempuh. Selain itu mencacah semua kemungkinan tidak akan memberikan informasi yang lebih penting dibandingkan dengan banyaknya cara yang dapat dilakukan.

Misalkan suatu perusahaan mebel, akan membuat 3 jenis model kursi masing-masing dengan 4 pilihan warna yaitu merah, biru, hijau, dan putih. Kombinasi model dan warna meja juga masing-masing dibuat dalam 3 pilihan bahan kayu. Dengan demikian banyaknya semua kemungkinan model dan warna kursi yang akan dibuat oleh perusahaan mebel tersebut ada sebanyak 3x4x3=36.

Contoh yang lain misalkan pelat nomor polisi kendaraan yang terdiri atas dua huruf, empat angka, dan dua huruf disusun secara berurutan seperti pada Gambar 2.4.

DP 2345 TU

Gambar 2.4. Contoh nomor polisi pada kendaraan

Daftar semua kemungkinan tanda nomor yang dapat dibuat sesuai dengan susunan tersebut adalah (26)(26)(10)(10)(10)(10)(26)(26) = 4569760000 (diperlukan waktu selama 147 tahun untuk menghitung pelat jika setiap pelat dihitung dengan kecepatan 1 detik).

Contoh 2.41. Seorang sekretaris memasukkan 10 surat yang berbeda ke dalam 10 amplop. Ada berapa cara sekretaris tersebut dapat memasukkan surat ke dalam amplop sedemikian sehingga masing-masing surat berada di dalam amplop yang berbeda?

Contoh 2.42. Ada berapa cara *n* pasangan suami istri duduk pada meja sedemikian sehingga laki-laki dan perempuan duduk berselang seling, dan tidak ada pasangan suami istri duduk bersebelahan?

Contoh 2.43. Tentukan ada berapa cara mencabut kartu ratu berwarna merah atau raja berwarna hitam dari satu set kartu bridge.

Jawab. Misalkan A adalah kartu ratu berwarna merah dan B adalah kartu raja berwarna hitam. Dalam hal ini, $\mathrm{n}(\mathrm{A}) = 2 = \mathrm{n}(\mathrm{B})$. Karena A dan B adalah himpunan yang disjoin, maka menurut aturan penjumlahan, $|\mathrm{A} \cup \mathrm{B}| = |\mathrm{A}| + |\mathrm{B}| = 2 + 2 = 4.$ Dengan demikian banyaknya cara mencabut kartu ratu berwarna merah atau kartu raja berwarna hitam ada 4 cara.

Contoh 2.44. Sebelum berangkat ke kantor, seseorang memiliki kebiasaan mengenakan baju dengan lima kancing, celana, kaos kaki, sepatu, dasi, dan jas dengan tiga kancing secara berturut-turut. Dengan tidak memperhatikan urutan memasang kancing baju dan jas, tentukan ada berapa cara yang berbeda orang tersebut mengenakan pakaian. Jika urutan pemasangan kancing diperhitungkan, ada berapa cara yang berbeda yang dapat dilakukan sebelum orang tersebut siap berangkat ke kantor?

B. Aturan Perkalian dan Penjumlahan

Pada bagian ini akan dipelajari dua aturan hitung yang sangat mendasar. Aturan-aturan ini membantu dalam mengorganisasi cara berpikir tentang cara menghitung tertentu dan menghindari enumerasi eksplisit. Aturan yang pertama didasarkan pada pemisahan suatu peristiwa menjadi kasus-kasus yang lebih sederhana, menghitung setiap kasus, kemudian menjumlahkan hasil-hasilnya. Aturan kedua dapat digunakan dalam situasi yang sama dengan Contoh 2.53, dimana setiap peristiwa dapat terjadi secara bertahap (mengundi dadu merah *kemudian* mengundi dadu biru). Aturan ini dapat digunakan tersendiri maupun secara konjungsi untuk menyusun landasan dari hampir semua teknik menghitung yang dipelajari. Kedua aturan yang disebutkan di atas dapat membantu dalam melakukan penghitungan tanpa harus mendaftarkan semua objek yang sedang dihitung.

Jika A dan B adalah dua himpunan berhingga yang disjoin, maka banyaknya elemen himpunan $A \cup B$ adalah jumlah dari banyaknya elemen himpunan A dengan banyaknya elemen himpunan B. Fakta ini sering dinyatakan sebagai aturan penjumlahan, yang menyatakan bahwa jika A dan B adalah peristiwa-peristiwa yang saling lepas, yaitu kejadian yang tidak terjadi bersamaan, dan A terjadi dalam m cara dan B terjadi dalam n cara maka peristiwa A atau B dapat terjadi dalam $m + n$ cara.

Contoh 2.45 (a) Ada berapa cara mengambil satu kartu *as atau ratu* dari tumpukan kartu bridge? (b) Ada berapa cara mengambil satu kartu as atau kartu merah dari tumpukan kartu bridge?

Jawab. (a) Misalkan A adalah peristiwa terambilnya satu kartu as dan B adalah terpilihnya kartu ratu. Ada 4 kartu as dan 4 kartu ratu di dalam tumpukan, maka A dapat terjadi dalam 4 cara dan B dapat terjadi dalam 4 cara. Kedua peristiwa ini adalah disjoin sehingga menurut aturan penjumlahan banyaknya cara mengambil satu kartu as dan satu kartu ratu adalah 4 + 4 = 8 cara. (b) karena diketahui bahwa ada 4 kartu as dan 26 kartu merah di dalam tumpukan kartu, mungkin mahasiswa akan menyimpulkan bahwa ada 4 + 26 = 30 cara mengambil kartu as atau kartu merah dari tumpukan. Tetapi jawaban ini salah, karena A dan B bukanlah peristiwa yang disjoin satu sama lain. Apa yang dilakukan pada jawaban (b) di atas adalah menghitung interseksi dari peristiwa A dan B sebanyak dua kali.

Kesalahan seperti ini sering terjadi. Karena terdapat dua elemen dalam himpunan irisan (ada dua kartu as berwarna merah) maka jumlah di atas harus dikurangkan dengan banyaknya elemen di dalam himpunan irisan sehingga diperoleh jawaban yang benar yaitu n(A) + n(B) – n($A \cap B$) = 4 + 26 – 2 = 28. Cara ini akan dibahas lebih rinci pada Bab IV tentang inklusi dan eksklusi.

Pendekatan lain yang juga dapat dilakukan adalah memisalkan A adalah terambilnya kartu aas hitam dan B adalah terambilnya kartu merah. Kedua peristiwa ini disjoin satu dengan yang lain. Dengan cara ini terlihat bahwa peristiwa A atau B sama dengan peristiwa mengambil satu kartu as dan satu kartu merah, dan berdasarkan aturan penjumlahan banyaknya cara mengambil satu kartu as hitam atau satu kartu merah adalah 2 + 26 = 28 cara.

Penjelasan yang telah diuraikan di atas menggambarkan beberapa hal penting. Penghitungan harus dilakukan dengan teliti karena mudah sekali terjadi kekeliruan. Jawaban yang salah dapat dikoreksi kemudian, tetapi dengan memperhatikan soal dari sudut pandang yang sedikit berbeda akan menghindarkan mahasiswa dari langkah koreksi yang menghambat. Dapat juga dilihat pada kasus ini bahwa suatu masalah dapat diselesaikan dengan berbagai cara.

Masalah dadu pada Contoh 2.53 memperlihatkan semua kemungkinan yang dapat muncul jika dua dadu berbeda dilempar bersama-sama. Peristiwa ini dapat diuraikan menjadi dua tahapan, yaitu melemparkan dadu pertama kemudian melemparkan dadu kedua. Jelas bahwa kedua tahapan tersebut tidak berhubungan atau tidak saling mempengaruhi karena hasil dari lemparan dadu pertama tidak mempengaruhi hasil lemparan dadu kedua. Bagaimanapun hasil lemparan dadu pertama, lemparan dadu kedua akan tetap memiliki enam kejadian yang berbeda. Representasi semua kemungkinan hasil lemparan dadu ditampilkan sebagai himpunan pasangan berurutan dari bilangan-bilangan asli untuk semua nilai (1 – 6). Elemen pertama menyatakan nilai untuk dadu pertama, sedangkan elemen kedua menyatakan nilai pada dadu kedua. Jadi dengan mudah dapat dilihat bahwa banyaknya kemungkinan munculnya setiap jumlah mata dadu dari kedua dadu adalah 6 x 6 = 36. Secara umum dapat dikatakan bahwa jika S adalah suatu himpunan pasangan berurutan dari bilangan-bilangan asli sedemikian sehingga elemen pertama dapat terjadi dalam m cara, dan untuk setiap m cara tersebut terdapat n cara untuk elemen kedua, maka banyaknya elemen himpunan S adalah m x n. Fakta ini dinyatakan sebagai aturan perkalian: misalkan peristiwa C dapat diuraikan menjadi dua tahap A dan B dan bahwa tahap A terjadi dalam m cara. Misalkan kedua peristiwa tidak saling mempengaruhi, artinya tahap *B* terjadi dalam *n* cara berapapun nilai yang dihasilkan pada tahap *A*. Maka peristiwa *C* dapat terjadi dalam *m* x *n* cara.

Contoh 2.46. Ada berapa cara mencabut (kartu tidak dikembalikan setelah dicabut) satu kartu as merah dan selanjutnya satu kartu merah lainnya dari tumpukan kartu bridge?

Jawab. Tahap *A* adalah mencabut satu kartu as merah, dan tahap *B* adalah mencabut satu kartu merah lainnya. Karena itu jawaban yang benar adalah 2 x 25 = 50 cara. Dalam contoh ini, cara terjadinya peristiwa *B* tergantung pada cara terjadinya peristiwa *A*. Jika pada tahap *A* terambil kartu as merah maka tahap *B* terdiri atas 24 cara mengambil kartu merah lain (karena kartu as merah sudah terambil). Aturan perkalian menunjukkan bahwa banyaknya cara terjadinya tahap *B* adalah 25 pada masing-masing kejadian tahap *A*.

Contoh 2.47. Ada berapa cara mencabut satu kartu as dan kemudian mencabut satu kartu merah dari tumpukan kartu bridge?

Jawab. Jika tidak teliti menjawab soal ini, mahasiswa dapat melakukan kesalahan dengan memisalkan bahwa tahap *A* adalah peristiwa mencabut satu kartu as dan tahap *B* adalah peristiwa mencabut satu kartu merah. Dengan menerapkan aturan perkalian maka diperoleh 4 x 26 = 104 cara. Tentu saja jawaban ini salah karena tahap *A* dan *B* tidak berkaitan seperti pada kasus sebelumnya. Jika dicabut kartu as hitam pada tahap *A* maka tahap *B* dapat terjadi dalam 26 cara. Tetapi jika pada tahap *A* dicabut kartu as merah maka tahap *B* dapat terjadi dalam 25 cara. Dalam hal ini terjadi penghitungan dua situasi yang tidak mungkin terjadi – mencabut kartu as diamond kemudian mencabut kartu tersebut sekali lagi, dan mencabut kartu as hati kemudian mencabut kartu as hati sekali lagi. Jawaban yang benar adalah 104 – 2 = 102.

Pendekatan lain diperoleh dari analisis yang telah dijelaskan. Penerapan aturan penjumlahan dilakukan dengan memisalkan tahap *A* sebagai peristiwa mencabut kartu as hitam kemudian dilanjutkan dengan mencabut kartu merah, dan tahap *B* sebagai peristiwa mencabut satu kartu as merah yang dilanjutkan dengan mencabut satu kartu merah lainnya. Dengan demikian peristiwa *A* atau *B* identik dengan peristiwa mencabut satu kartu as dan kemudian mencabut satu kartu merah. Kedua peristiwa ini disjoin karena kartu yang pertama dicabut terdiri atas kartu yang warnanya berbeda. Dengan aturan perkalian diketahui tahap *A* terjadi dalam 2 x 26 = 52 cara dan tahap *B* terjadi dalam 2 x 25 = 50 cara. Jadi jawaban yang benar adalah 52 + 50 = 102 cara. Dalam kasus ini aturan penjumlahan dan aturan perkalian diterapkan sekaligus.

Aturan penjumlahan dapat dikembangkan pada sebarang peristiwa dengan jumlah kasus yang berhingga. Demikian juga aturan perkalian, dapat dikembangkan pada sebarang peristiwa dengan jumlah tahap yang berhingga. Aturan penjumlahan akan ditunjukkan lagi dengan suatu ilustrasi.

Contoh 2.48. Berapa kemungkinan bahwa setidak-tidaknya dua dari *n* orang yang terpilih lahir pada tanggal dan bulan yang sama?

Jawab. Kemungkinannya adalah k/t dimana *t* adalah banyaknya cara menandai tanggal kelahiran dari *n* orang, dan *k* adalah banyaknya cara menandai tanggal lahir sedemikian sehingga setidak-tidaknya terdapat dua orang yan g lahir pada tanggal dan bulan yang sama. Nilai *t* dapat diketahui dengan menjabarkan proses penandaan tanggal kelahiran atas *n* tahapan: menandai orang pertama lahir pada tanggal pertama, menandai orang kedua lahir pada tanggal kedua, dan seterusnya. Dengan mengasumsikan bahwa ada 365 hari dalam setahun dan bahwa tanggal kelahiran terdistribusi secara acak, maka ada 365^n kemungkinan.

Selanjutnya akan ditentukan *k*, yaitu banyaknya cara menandai tanggal lahir sedemikian sehingga terdapat setidak-tidaknya dua orang lahir pada tanggal dan bulan yang sama. Tidak mudah menentukan *k* secara langsung. Untuk itu dimisalkan *m* adalah banyaknya cara untuk menandai tangal kelahiran sehingga tidak ada orang yang lahir pada tanggal dan bulan yang sama. Berdasarkan aturan penjumlahan, $m+k=365^n$, sehingga $k=365^n-m.$ Untuk menentukan *m* maka proses penandaan tanggal dan bulan kelahiran dijabarkan ke dalam *n* tahapan, yaitu dengan menandai orang pertama dengan tanggal pertama, menandai orang kedua dengan tanggal kedua, dan seterusnya. Dengan asumsi bahwa terdapat 365 hari dalam setahun maka $m=365\,x\,364\,x\,363\,x\cdots x\left(365-\left(n-1\right)\right).$ Hal ini berarti bahwa $k=365^m-m$ yaitu $365^m-365\,x\,364\,x\,363\,x\cdots x\left(365-\left(n-1\right)\right).$ Jadi dari *n* orang yang dipilih secara acak, setidak-tidaknya terdapat dua orang yang lahir pada tanggal dan bulan yang sama memiliki kemungkinan sebesar

$$\frac{365^n \text{ - } 365 \text{ x } 364 \text{ x } 363 \text{ x} \cdots \text{x } (365\text{-}(n\text{-}1))}{365^n}.$$

Kemungkinan ini memiliki nilai yang lebih besar dari 0,5 jika $n \geq 23$. Dan jika $n > 30$ maka nilai kemungkinannya lebih dari 0,7.

A.1. Pasangan Berurutan

Suatu daftar yang terdiri atas dua anggota himpunan dan berurutan disebut pasangan berurutan. Jika elemen pertama adalah *a* dan elemen kedua adalah *b* maka himpunan pasangan berurutan dari himpunan tak kosong *A* dan *B* didefinisikan sebagai

$$(a, b) = \{(a, b) | a \in A \text{ dan } b \in B\} \tag{2.8}$$

Contoh 2.49. Seorang mahasiswa memiliki tiga handphone dan empat kartu SIM. Ada berapa pasangan handphone dan kartu SIM yang dapat digunakan untuk menelepon?

Dalam contoh ini, dapat diketahui bahwa kombinasi handphone dengan kartu SIM dapat dinyatakan sebagai pasangan berurutan (handphone, kartu SIM). Menurut aturan perkalian, tiga handphone dipasangkan dengan empat kartu SIM akan menghasilkan 12 kemungkinan pasangan.

Teorema 2.3. Jika himpunan *M* memiliki *m* anggota dan himpunan *N* memiliki *n* anggota, maka terdapat *mn* pasangan berurutan yang dapat dibuat dari himpunan *M* dan himpunan *N*. Bukti dari teorema ini dilakukan dengan cara yang sama dengan Contoh 2.49.

A.2. Perkalian Cartesian

Himpunan semua pasangan berurutan seperti yang disebutkan pada Contoh 2.49. dan Teorema 2.3 sering dinamakan perkalian Cartesian. Perkalian Cartesian dari *M* sebagai elemen pertama dan *N* sebagai elemen kedua dinyatakan dengan $M \times N$. Banyaknya elemen dari $|M \times N| = |M| \cdot |N|$.

Contoh 2.50. Misalkan suatu kelompok kegiatan mahasiswa akan memilih ketua, sekretaris dan bendahara, maka masalah yang akan diselesaikan terdiri atas daftar tiga elemen. Selanjutnya jika kelompok kegiatan tersebut akan memilih wakil ketua juga, maka daftar yang akan dibuat terdiri atas empat elemen. Banyaknya daftar yang disusun dari empat nama calon ketua, wakil ketua, sekretaris, dan bendahara, dari 15 anggota adalah 15.14.13.12.

A.3. Daftar Elemen-elemen Berbeda

Aturan perkalian menghasilkan beberapa rumusan yang penting. Tanpa rumus tersebut, perhitungan biasa dilakukan secara langsung. Simbol $n!$ yang disebut *n* factorial, menyatakan perkalian dari *n* bilangan bulat pertama, yaitu $n! = n(n-1)\cdots 3.2.1$. Simbol $0!$ digunakan untuk menyatakan bilangan 1.

Teorema 2.4. Banyaknya cara menyusun daftar semua elemen dari suatu himpunan yang terdiri atas *n* elemen adalah *n*! jka tidak ada elemen himpunan yang terdaftar dua kali. Bukti Teorema 2.4 dapat dilakukan langsung dengan aturan perkalian.

Suatu daftar yang terdiri dari semua anggota suatu himpunan (tanpa perulangan) biasa disebut *permutasi* dari himpunan tersebut. Daftar yang terdiri dari *k* elemen yang berbeda yang dipilih dari himpunan *S* yang memiliki *n* elemen, disebut **permutasi *k* elemen** dari *S* atau permutasi *k* elemen yang dipilih dari *S*. Jika *x* adalah elemen himpunan *S* terdapat di dalam daftar yang disusun, maka *x* adalah anggota permutasi tersebut; jika *x* menempati urutan ke-*j* dalam daftar maka *x* adalah anggota ke-*j* permutasi.

Seringkali kita akan menentukan banyaknya permutasi *k* elemen dari suatu himpunan. Banyaknya permutasi *k* elemen dari suatu himpunan yang memiliki *n* anggota dinyatakan dengan $(n)_k$ dan dinamakan ***faktorial susut*** atau pangkat faktorial. Banyaknya permutasi tersebut adalah $\frac{n!}{(n-k)!}$. Kuantitas ini sering juga dinyatakan dengan $P(n,k)$ atau ${}_nP_k$ yaitu banyaknya permutasi *n* objek yang dipilih sebanyak *k* setiap pemilihan.

Teorema 2.5. Banyaknya permutasi *k* elemen yang dipilih dari suatu himpunan dengan *n* anggota adalah

$$\frac{n!}{(n-k)!} = (n)_k = n(n-k)\cdots(n-k+1), \text{ untuk } k \le n \tag{2.9}$$

Bukti. Jika *k* = 1, dan banyaknya elemen di dalam himpunan itu ada sebanyak maka daftar yang dapat dibuat ada sebanyak $\frac{n!}{(n-1)!}$. Untuk sebarang bilangan *k*, terdapat *n* pilihan untuk elemen pertama, *n* – 1 pilihan untuk elemen kedua, *n* – 2 pilihan untuk elemen ketiga, dan seterusnya, sampai diperoleh $n - k + 1$ pilihan untuk elemen ke-k. Sehingga berdasarkan aturan perkalian, diperoleh $n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}$ daftar.

A.4. Susunan Dengan Perulangan

Contoh-contoh yang telah disebutkan sebelumnya adalah penyusunan suatu susunan yang dipilih dari semua elemen suatu himpunan, tanpa adanya perulangan elemen dalam himpunan tersebut. Dalam situasi tertentu, penyusunan daftar yang diambil dari semua elemen suatu himpunan dapat dilakukan dengan perulangan elemen tertentu.

Contoh 2.51. Prosesor dari suatu komputer akan menerima empat perintah dari memory. Setiap perintah dapat disimpan pada lima media penyimpanan data yang terhubung dengan prosesor. Ada berapa cara perintah tersebut dapat disimpan ke dalam media penyimpanan?

Jawab. Karena terdapat lima kemungkinan tempat penyimpanan data, maka keempat perintah dapat disimpan sebanyak 5.5.5.5 cara.

Teorema 2.6. Banyaknya susunan yang panjangnya k yang masing-masing dipilih dari suatu himpunan yang memiliki n anggota (dengan perulangan), adalah n^k.

Bukti. Untuk setiap posisi di dalam daftar, terdapat n pilihan, sehingga dengan menerapkan aturan perkalian, diperoleh n^k daftar.

A.5. Pendekatan Stirling untuk *n*!

Di dalam bukunya *Metodus Differentialis,* tahun 1730, James Stirling menulis sebuah pernyataan penting bahwa untuk nilai-nilai n yang besar, kuantitas n! kira-kira besarnya sama dengan $\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, dengan e adalah basis dari logaritma natural. Semakin besar nilai n, rasio antara n! dengan $\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ akan mendekati 1 (meskipun selisih antara kedua besaran tersebut semakin besar jika n semakin besar). Pendekatan Stirling ini mempersingkat perhitungan untuk memperoleh nilai pendekatan n! untuk nilai-nilai n yang besar.

Contoh 2.52. Perhatikan bahwa perkiraan nilai 80! dapat dihitung dengan cara sebagai berikut:

$$\left(\frac{80}{e}\right)^{80}=\left(\frac{80}{e}\right)^{64}.\left(\frac{80}{e}\right)^{16},$$

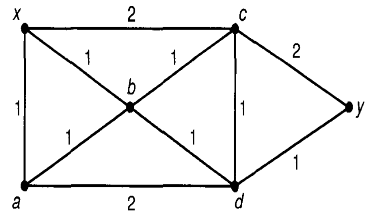
sehingga kita dapat menghitung rasio $r=\frac{80}{e}$ untuk menentukan $r^2, r^4, r^8, r^{16}, r^{32}$, dan r^{64} kemudian menemukan r^{80} yang selanjutnya dikalikan dengan $\sqrt{160\pi}$.

Persoalan kombinatorik bukan merupakan persoalan yang baru dalam kehidupan nyata. Banyak persoalan kombinatorik yang sederhana telah diselesaiakan dalam masyarakat. Misalkan, saat pemilihan pemain untuk tim sepak bola yang terdiri dari 11 pemain. Apabila ada 20 orang ingin membentuk suatu tim sepak bola, ada berapa kemungkinan komposisi pemain yang dapat terbentuk? Contoh lain adalah dalam menentukan sebuah *password* panjangnya 6 sampai 8 karakter. Karakter boleh berupa huruf atau angka. Berapa banyak kemungkinan *password* yang dapat dibuat? Tetapi selain itu para ilmuwan pada berbagai bidang juga sering menemukan sejumlah persoalan yang harus diselesaikan. Pada Bab ini, kita akan membahas tentang kombinatorik, permutasi dan apa yang terkait dengan itu. Kombinatorik merupakan cabang matematika untuk menghitung jumlah penyusunan objek-objek tanpa harus mengenumerasi semua kemungkinan susunannya.

A.6. Lintasan Terpendek

Misalkan suatu sistem lalulintas yang terdiri atas jalan raya dan persimpangan-persimpangan. Sesorang sedang berjalan dari persimpangan A ke persimpangan B. Secara umum ada beberapa lintasan yang dapat ditempuh dari titik A ke titik B. Masalahnya adalah lintasan mana yang terpendek yang dapat dipilih dari A ke B. Di dalam kombinatorik, hal seperti ini dinamakan *optimasi.* Salah satu cara mengetahui lintasan terpendek tersebut adalah dengan membuat daftar semua jalur dari A ke B. Untuk menempuh lintasan terpendek, tidak menjadi masalah jika seseorang harus melalui suatu jalur lebih dari satu kali. Namun demikian cara ini bukanlah pilihan yang efisien khususnya untuk sistem yang jauh lebih besar. Dalam masalah ini yang diperlukan adalah algoritma untuk menentukan lintasan terpendek. Di dalam ilmu manajemen, masalah ini dikenal dengan istilah *critical path method* (metode jalur kritis).

Persoalan menentukan lintasan terpendek antara dua titik dapat ditinjau secara abstrak. Misalkan *X* adalah sejumlah objek yang berhingga yang dinamakan *vertex* atau *vertice* atau simpul, dan *E* adalah sejumlah garis yang menghubungkan pasangan-pasangan simpul yang disebut *edge* (sisi). Pasangan berurutan antara simpul dengan sisi (*X, E*) disebut *graf.*



Gambar 2.5. Lintasan terpendek pada graf

Suatu *graf* merupakan contoh struktur diskrit yang berkembang khususnya dalam mempelajari kombinatorika. Prinsip graf telah dikembangkan secara luas di dalam berbagai bidang, antara lain psikologi, sosiologi, kimia, genetika, dan ilmu komunikasi. Mahasiswa dapat memberikan berbagai contoh untuk masalah-masalah yang memiliki beberapa kemungkinan penyelesaian untuk setiap kemungkinan lainnya.

C. Dua Model Pencacahan

Misalkan dari *n* objek yang berbeda yaitu $\{x_1, x_2, \cdots x_n\}$ akan diambil sampel sebanyak *r* objek. Ada berapa cara yang dapat dilakukan? Pertanyaan seperti ini sebenarnya tidak terlalu jelas karena adanya kata-kata "diambil sampel" yang sering disalahartikan.

(i) Apakah sampel yang akan diambil harus berurutan? Misalkan diambil sampel *r* sebanyak 2 satuan, apakah dengan mengambil sampel x_1 kemudian x_2 berbeda jika pertama diambil x_2 kemudian x_1?

(ii) Apakah sampel yang terambil boleh berulang? Misalkan akan diambil sampel sebanyak 2 satuan, bolehkah sampel pertama x_1 dan sampel kedua juga x_1? Dalam hal ini apakah setelah objek pertama diambil sebagai sampel, onjek tersebut dikembalikan ke kumpulan *n* objek tadi?

Karena masing-masing pertanyaan memiliki dua kemungkinan jawaban, maka menurut aturan perkalian, masalah seperti ini terdiri atas empat masalah yang terpisah yaitu:

(1) Ada berapa sampel yang dapat diambil jika urutan pengambilan sampel dibedakan, dan sampel boleh diambil berulang?

(2) Ada berapa sampel yang dapat diambil jika urutan pengambilan sampel dibedakan, dan sampel tidak boleh diambil berulang?

(3) Ada berapa sampel yang dapat diambil jika urutan pengambilan sampel tidak dibedakan, dan sampel boleh diambil berulang?

(4) Ada berapa sampel yang dapat diambil jika urutan pengambilan sampel tidak dibedakan, dan sampel tidak boleh diambil berulang?

Untuk menyelesaikan masalah-masalah ini perlu diperhatikan beberapa terminologi. Jika urutan pengambilan sampel dibedakan, maka objek yang akan diambil dinamakan *susunan* (*arrangement*). Jika urutan sampel tidak dibedakan, maka objek yang akan diambil dinamakan *pilihan* (*selections*). Jika sampel boleh berulang, maka objek yang diambil dinamakan *pengembalian* (*replacement*). Susunan r objek dengan pengembalian disebut r-barisan (r-*sequence*). Suatu r-*permutasi* adalah susunan tanpa pengembalian. Susunan kartu acak dalam permainan bridge adalah contoh permutasi. Selanjutnya, pemilihan r objek tanpa pengembalian disebut r-kombinasi, misalnya himpunan bagian. Pemilihan r objek dengan pengembalian disebut r-multiset. Susunan huruf-huruf yang dapat dibentuk dari MISSISSIPPI dapat digolongkan sebagai suatu multiset yang terdiri atas 4 S, 4 I, 2 P, dan 1 M.

Terminologi ini pada umumnya tidak disebutkan dalam soal yang akan diselesaikan. Oleh karena itu mahasiswa harus membaca soal dengan teliti agar dapat memastikan cara menyelesaikan soal tersebut. Selain itu, terminologi yang sama dapat memiliki nama yang berbeda. Sebagai contoh, r-kombinasi seringkali dituliskan dengan nama r-set, dan r-multiset sering dituliskan r-*assortment*.

Misalkan suatu kelas terdapat sejumlah n mahasiswa. Keseluruhan mahasiswa yang terdaftar di dalam kelas tersebut akan dibentuk kelompok-kelompok kecil yang anggota-anggotanya sama banyak, misalkan sama dengan r. Ada empat kemungkinan cara membentuk kelompok kecil dari kelompok mahasiswa tersebut. Masing-masing kelompok kecil itu juga memiliki kemungkinan tertentu dalam pembentukannya.

Cara Pertama: Dari sejumlah n mahasiswa dalam kelas, akan dibentuk menjadi beberapa kelompok kecil yang masing-masing terdiri atas r orang mahasiswa. Setelah seorang mahasiswa didaftar sebagai anggota kelompok kecil, mahasiswa yang bersangkutan kembali ke kelompok besar untuk kemudian dapat terpilih kembali menjadi anggota kelompok kecil lainnya. Urutan nama mahasiswa yang didaftar menjadi anggota kelompok kecil juga perlu diperhatikan. Mahasiswa pertama yang terpilih kemudian mahasiswa kedua, dibedakan dengan mahasiswa kedua kemudian mahasiswa pertama. (baris pertama, kolom pertama).

Cara Kedua: Setelah seorang mahasiswa didaftar ke dalam kelompok kecil, mahasiswa yang tersebut tidak kembali ke kelompok besar. Urutan nama mahasiswa yang diambil menjadi anggota kelompok kecil juga perlu diperhatikan. Mahasiswa pertama yang terpilih kemudian mahasiswa kedua, dibedakan dengan mahasiswa kedua kemudian mahasiswa pertama. (baris pertama, kolom kedua).

Cara Ketiga: Mahasiswa yang sudah terdaftar sebagai anggota kelompok kecil, kembali ke kelompok besar. Urutan nama mahasiswa yang diambil menjadi anggota kelompok kecil tidak perlu diperhatikan. Mahasiswa pertama yang terpilih kemudian mahasiswa kedua, dianggap sama saja jika mahasiswa kedua kemudian mahasiswa pertama. (baris kedua, kolom pertama).

Cara Keempat: Mahasiswa yang sudah terdaftar sebagai anggota kelompok kecil, tidak kembali ke kelompok besar. Urutan nama mahasiswa yang diambil menjadi anggota kelompok kecil diperhatikan. Mahasiswa pertama yang terpilih kemudian mahasiswa kedua, dianggap berbeda jika mahasiswa kedua kemudian mahasiswa pertama. (baris kedua, kolom kedua).

Jika akan diambil 2 orang mahasiswa sebagai sampel dari antara 3 orang mahasiswa, yaitu $\{x_1, x_2, x_3\}$. Dalam hal ini masalah yang dihadapai adalah n = 3 dan r = 2. Gambar di bawah ini menjelaskan empat cara penyelesaian yang berbeda.

	BERULANG	TIDAK BERULANG
SUSUNAN	$x_1x_1 \quad x_2x_1 \quad x_3x_1$ $x_1x_2 \quad x_2x_2 \quad x_3x_2$ $x_1x_3 \quad x_2x_3 \quad x_3x_3$ $r -$ barisan, untuk $r = 2$ n^r	$x_1x_2 \quad x_2x_1 \quad x_3x_1$ $x_1x_3 \quad x_2x_3 \quad x_3x_2$ $r -$ permutasi, untuk $r = 2$ $P(n,r) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$
SELEKSI	$\{x_1, x_1\} \quad \{x_2, x_2\}$ $\{x_1, x_2\} \quad \{x_2, x_2\}$ $\{x_1, x_3\} \quad \{x_3, x_3\}$ $r -$ multiset, untuk $r = 2$ $\begin{pmatrix} r+n-1 \\ r \end{pmatrix}$	$\{x_1, x_2\}$ $\{x_1, x_3\}$ $\{x_2, x_3\}$ $r -$ kombinasi, untuk $r = 2$ $C(n,r) = \dfrac{P(n,r)}{r!} = \dfrac{n!}{(n-r)!r!} = \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$

Bagaimana dengan kasus r = 0? Apa pentingnya sampel berukuran 0? Sebagaimana telah disebutkan sebelumnya, r-kombinasi dapat dianggap sebagai himpunan bagian yang terdiri atas r elemen, sehingga oleh karena itu suatu 0-kombinasi dapat dianggap sebagai himpunan kosong. Karena hanya ada satu himpunan kosong, maka dapat dipastikan bahwa hanya ada satu 0-kombinasi. Ahli matematika juga sepakat bahwa hanya ada tepat satu 0-barisan, satu 0-permutasi, dan satu 0-multiset.

Proposisi 2.1. Banyaknya r-barisan dari n objek adalah n^r.

Bukti. Jika $r = 0$ maka $n^r = n^0 = 1$, sesuai dengan mengingat bahwa hanya ada satu 0-barisan. Selanjutnya untuk $n \geq 1$. Susunan r-barisan dapat diuraikan menjadi r langkah.

Langkah pertama adalah mengambil objek pertama, langkah kedua mengambil objek kedua, dan seterusnya. Pada masing-masing langkah diambil *n* pilihan. Berdasarkan aturan perkalian susunan ini dapat dilakukan dalam n^r cara.

Proposisi 2.2. Jumlah *r*-permutasi dari *n* objek adalah $n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$.

Bukti. *r*-permutasi dari *n* objek dilambangkan dengan $P(n,r)$. Jika $r = 0$, maka menurut definisi, $P(n,r)=1$. Jika $r>n$ maka $P(n,r)=0$ karena faktanya, tidak ada cara mengambil *r* objek yang berbeda dari $r>n$ objek. Jadi untuk $n\geq r\geq 1$ maka susunan *r*-permutasi menjadi *r* langkah. Objek pertama diambil kemudian selanjutnya diambil objek kedua yang BERBEDA, dan seterusnya. Ada *n* pilihan pada langkah pertama, $n - 1$ pilihan pada langkah kedua, … , dan $n - r + 1$ pilihan pada langkah ke-*r*. Dengan demikian menurut aturan perkalian, susunan ini dapat dilakukan dengan $n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$ cara.

Jika $n = r$, maka diperoleh banyaknya cara menyusun *n* objek yang berbeda di dalam satu baris. Susunan sedemikian itu dipandang sebagai suatu permutasi, *n*-permutasi. Banyaknya cara menyusun *n* orang dalam satu baris adalah $n(n-1)(n-2)\cdots 2.1$. Pernyataan ini umum dinamakan *n*!. Sebagai contoh, 6 orang dapat disusun dalam 6 cara yaitu $6!=6.5.4.3.2.1=720$. Perhatikan bahwa $n!=n(n-1)(n-2)\cdots 2.1$ hanya untuk $n >$ 1. Didefinisikan bahwa 0! = 1 sehingga $n!=n(n-1)!$ untuk $n\geq 1$.

Selanjutnya, $P(n,r)=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$ dapat diterapkan untuk semua bilangan real *n* dan bilangan asli *r* (meskipun kita hanya mempunyai interpretasi fisis mengenai bilangan asli *n* dan *r*). Sebagai contoh, $P(-1,0)=1$ dan $P(2,3)=0$.

Contoh 2.53. Berapa probabilitas diperolehnya jumlah mata yang kurang dari 5 jika dua dadu berbeda (merah dan biru) dilempar bersamaan?

Jawab. Penyelesaian masalah nyata seperti ini dapat diselesaikan dengan cara mencoba menyusun suatu model matematika yang tepat. Salah satu pendekatan yang dapat dilakukan adalah dengan mengandaikan jumlah mata dadu yang mungkin yaitu {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12} dan misalkan {2, 3, 4} adalah subset dari semua kemungkinan jumlah mata dadu yang akan muncul. Menurut definisi, peluang terjadinya subset ini adalah 3/11. Ini merupakan pernyataan matematis, tetapi apakah tidak ada makna lain dari hasil tersebut? Misalkan terdapat sepasang dadu yang dilemparkan satu juta kali dan ternyata kemunculan mata dadu berjumlah kurang dari 5 sama sekali tidak mendekati 3/11. Kesimpulan apa yang diperoleh? Mungkin lemparan dadu belum mencukupi, atau mungkin dadu yang digunakan tidak seimbang pada masing-masing sisinya. Akhirnya disimpulkan bahwa model matematika yang diperoleh adalah model yang salah. Tetapi model mana yang lebih baik? Kata kunci yang harus ddingat adalah bahwa definisi yang digunakan dalam menentukan kepastian peluang kejadian tertentu adalah kemungkinan yang *equally likely* (memiliki kementakan yang sama). Jadi jelas bahwa munculnya jumlah dua mata tidak memiliki peluang yang sama dengan jumlah tiga mata. Hanya ada satu cara munculnya jumlah dua mata dan ada dua cara munculnya jumlah tiga mata dadu – yaitu satu mata pada dadu merah dan dua mata pada dadu biru, atau sebaliknya. Hal ini dapat dinyatakan dalam bentuk kumpulan pasangan berurutan dari jumlah mata dadu yang mungkin muncul jika dua dadu berbeda dilempar bersamaan. Elemen pertama dari pasangan berurutan menyatakan mata dadu yang muncul dari dadu pertama (merah) dan elemen kedua menyatakan mata mata dadu yang muncul dari dadu kedua (biru).

$$\begin{matrix} \{(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6)\} \end{matrix}$$

Jumlah mata dadu yang diinginkan adalah kurang dari 5. Jadi subset yang diperlukan adalah pasangan berurutan yang berjumlag kurang dari 5.

$$\begin{matrix} \{(1,1) & (1,2) & (1,3) \\ (2,1) & (2,2) & \\ (3,1)\} & & \end{matrix}$$

Dalam kasus ini, peluang munculnya jumlah mata dadu kurang dari 5 adalah 6/36 = 1/6, sesuai dengan percobaan yang dilakukan.

Kasus di atas menggambarkan dua hal penting. Pertama, penyelesaian masalah peluang harus dilakukan dengan memilih model yang tepat. Kedua, salah satu teknik untuk menghitung peluang terjadinya suatu peristiwa adalah dengan membuat daftar semua kemungkinan yang bisa terjadi. Enumerasi secara eksplisit seperti ini seringkali panjang dan rumit. Untuk menghindari masalah tersebut, pada bab ini akan dipelajari masalah dasar dimana sebagian besar persoalan akan diminimalkan dengan menggunakan pembuktian matematis yang akan dijelaskan selanjutnya.

Contoh. 2.54. Suatu tim baseball terdiri atas 25 orang pemain. Tunjukkan bahwa terpilihnya 9 orang dalam satu barisan dapat dihitung dengan cara yang sama dengan memilih 9 sampel dari {1, 2, 3, … , 25} dimana urutan tidak diperhatikan dan tidak ada angka yang berulang.

Jawab. Satu barisan dapat dibentuk dengan mendaftar urutan 9 pemain dari 25 anggota tim. Masalah umumnya adalah berapa banyak sampel sebanyak *r* objek yang diambil dari $\left\{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\right\}$ jika urutan tidak dipentingkan dan tidak ada objek berulang.

D. Model Distribusi Pencacahan

Jika *r* bola yang akan didistribusikan ke dalam *n* kotak yang berbeda, ada berapa cara mendistribusikan bola-bola tersebut? Masalah distribusi ini dikenal sebagai *masalah penempatan* atau *masalah alokasi*. Terlihat dari pernyataan di atas bahwa masalah tidak dijelaskan secara spesifik, khususnya pada bagian pernyataan "*r* bola yang akan didistribusikan" yang bermakna bias karena:

(i)' Tidak dijelaskan apakah bola tersebut identik atau berbeda

(ii)' Tidak diketahui berapa bola yang akan dimasukkan ke dalam setiap kotak: Apakah boleh memasukkan sebarang jumlah bola, atau paling banyak satu bola per kotak.

Karena ada dua jawaban untuk setiap pertanyaan, maka menurut aturan perkalian masalah ini dapat dibedakan ke dalam empat masalah yang berbeda.

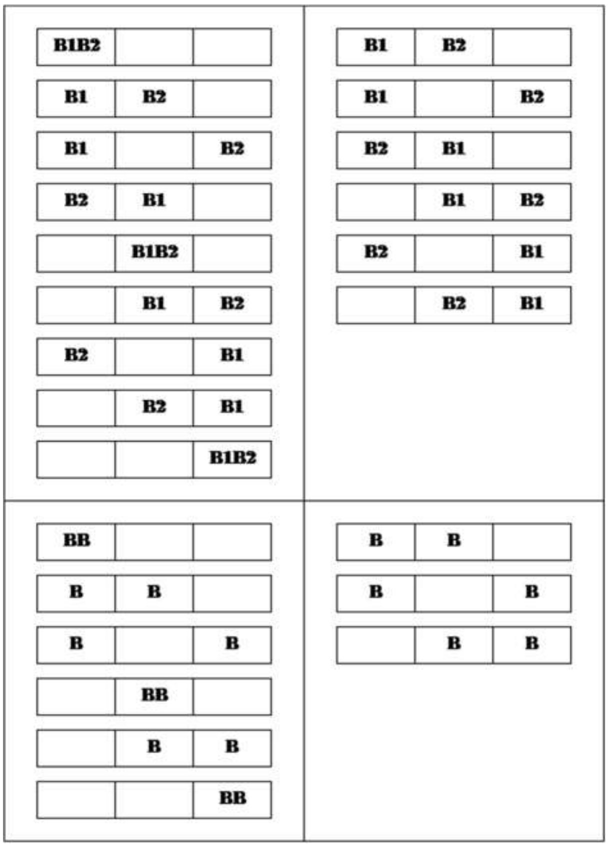
(1)' Ada berapa cara mendistribusikan *r* bola yang berbeda ke dalam *n* kotak yang berbeda, dengan sebarang jumlah bola pada setiap kotak?

(2)' Ada berapa cara mendistribusikan *r* bola yang berbeda ke dalam *n* kotak yang berbeda, dengan jumlah sebanyak-banyaknya satu bola yang boleh dimasukkan ke dalam setiap kotak?

(3)' Ada berapa cara mendistribusikan *r* bola identik ke dalam *n* kotak yang berbeda, dengan jumlah sebanyak-banyaknya satu bola yang boleh dimasukkan ke dalam setiap kotak?

(4)' Ada berapa cara mendistribusikan *r* bola identik ke dalam *n* kotak yang berbeda, dengan sebarang jumlah bola yang dapat dimasukkan ke dalam setiap kotak?

Contoh 2.54. Gambar 2.6. menunjukkan 4 masalah yang berbeda dan penyelesaiannya untuk $n = 3$ dan $r = 2$. Masalah yang sama telah diperlihatkan sebelumnya dan terlihat bahwa penyelesaian masing-masing situasi dapat dilakukan dengan mudah.



Gambar 2.6. Penyelesaiannya susunan objek untuk $n = 3$ dan $r = 2$.

Terlihat dalam kasus ini adanya dua model pencacahan. Pertama, adalah pencacahan yang menyangkut pendistribusian dua bola ke dalam tiga kotak yang berbeda. Model yang kedua adalah pengambilan dua bola dari Kedua model tersebut ekivalen. Misalkanlah adalah kotak ke-*i*. Jika bola tersebut identik maka bola nomor satu menyatakan posisi pertama di dalam susunan dan bola nomor dua menyatakan posisi kedua. Dengan kata lain, memasukkan bola nomor satu ke dalam kotak ke-*i* adalah ekivalen dengan menempatkan pada posisi pertama di dalam susunan, dan memasukkan bola nomor dua ke dalam kotak ke-*i* adalah ekivalen dengan menempatkan pada posisi kedua dalam susunan. Jika bola tersebut identik, maka urutan posisi tidak penting.

Memasukkan satu bola ke dalam kotak ke-*i* bermakna sama dengan mengambil tanpa memperhatikan urutan. Jadi jelas bahwa masalah penempatan eksklusif menyatakan pengambilan objek-objek tanpa perulangan.

Perhatikan kembali pertanyaan (i) dan (ii) serta permasalahan (1)–(4) pada halaman 39, bandingkan dengan $(\mathrm{i})'$ dan $(\mathrm{ii})'$ serta masalah $(1)' - (4)'$pada halaman 45-46 di atas. Dapat dilihat bahwa (i) dan menanyakan hal yang sama, demikian pula (ii) dan Jawaban terhadap masalah (1) dan adalah sama, demikian juga untuk ketiga masalah lainnya. Dengan demikian, dapat disusun empat proposisi di bawah ini.

Proposisi 2.3. Ada cara untuk mendistribusikan *r* bola yang berbeda ke dalam *n* kotak yang berbeda dimana setiap kotak berisi sebarang banyaknya bola.

Proposisi 2.4. Ada cara mendistribusikan *r* bola berbeda ke dalam *n* kotak berbeda dimana setiap kotak berisi sebanyak-banyaknya satu bola.

Proposisi 2.5. Ada cara mendistribusikan *r* bola identik ke dalam *n* kotak berbeda dimana setiap kotak berisi paling banyak satu bola.

Proposisi 2.6. Ada cara untuk mendistribusikan *r* bola identik ke dalam *n* kotak berbeda dimana setiap kotak berisi sebarang banyaknya bola.

Contoh 2.55. Tentukan peluang adanya satu kotak yang kosong jika sepuluh bola identik didistribusikan secara acak ke dalam lima kotak yang berbeda.

Jawab. Ada C(5-1+10,10) cara mendistribusikan 10 bola indentik ke dalam 5 kotak berbeda, dengan sebarang banyaknya bola dimasukkan ke dalam setiap kotak. Selanjutnya ditentukan banyaknya cara mendistribusikan 10 bola identik ke dalam 5 kotak berbeda sedemikian sehingga terdapat dengan tepat satu lubang yang kososng. Jadi pendistribusian bola tersebut dapat disusun dalam tiga tahap. Pertama, kotak kosong tersebut dapat ditentukan dalam C(5,1) cara. Selanjutnya dapat dipastikan bahwa keempat kotak yang tersisa tidak akan kosong karena setidak-tidaknya satu bola dapat dimasukkan ke dalam setiap kotak. Karena bolanya identik maka cara di atas hanya dapat dilakukan dalam 1 cara. Tahap terakhir adalah mendistribusikan 6 bola identik yang tersisa ke dalam 4 kotak yang berbeda, dengan sebarang jumlah bola pada masing-masing kotak. Cara ini dapat dilakukan dalam C(4-1+6, 6) cara. Dengan menerapkan aturan perkalian, diperoleh 5 x 1 x C(4 – 1 + 6, 6) cara mendistribusikan 10 bola identik ke dalam 5 kotak berbeda dengan 1 kotak yang kosong. Jadi peluangnya adalah 5 x C(4 – 1 + 6, 6)/C(5 – 1 + 10, 10) = (5 x 84)/1001 = 0,419.

Contoh 2.56. Masalah kombinatorika umumnya dapat diterapkan pada dunia nyata. Pada sebagian besar masalah dapat terlihat bahwa masalah tersebut melibatkan barisan, permutasi, kombinasi, atau multiset. Tetapi tidak selamanya demikian karena beberapa kasus tidak hanya diselesaikan dengan salah satu metode, tetapi harus menggunakan beberapa cara sekaligus.

Misalkan suatu sistem "dunia nyata" yang di dalamnya terdistribusi r partikel, masing-masing pada n tingkatan energi yang berbeda. Konfigurasi keseluruhan sistem digambarkan dengan distribusi partikel-partikel pada berbagai tingkatan. Misalnya partikel tersebut berupa atom-atom atau molekul-molekul gas ideal yang pada temperatur dan keadaan tertentu dapat mengandung tingkatan energi tertentu. Partikel tersebut juga mungkin berupa elektron-elektron dan tingkatannya dapat berupa tingkatan energi pada atom tertentu. Atau jika partikel tersebut berupa foton-foton, maka tingkatannya dapat berbeda-beda sesuai tingkat energinya. Ada berapa konfigurasi sistem yang dapat terbentuk?

Jawab. Seperti telah disebutkan, masalah ini tidak dapat dipastikan situasinya karena partikel tersebut tidak dapat dipastikan apakah identik atau berbeda, dan juga tidak dapat dipastikan apakah pada tingkatan energi tertentu boleh terdapat lebih dari satu partikel. Di dalam ilmu-ilmu fisika posisi partikel-partikel ini tidak dapat dipastikan, karena itu dijelaskan dengan menggunakan Teori Ketidakpastian. Meskipun demikian, situasi seperti ini hendaknya tidak mengaburkan pemahaman mahasiswa terhadap suatu konsep matematis. Masalah yang tidak pasti dapat dijelaskan dengan berbagai interpretasi yang berbeda sehingga tujuan utama kuliah ini tetap tercapai, yaitu belajar untuk menentukan masalah kombinatorik dengan tepat.

Seperti diketahui, ada empat kemungkinan penyelsaian untuk kasus ini, tergantung cara pandang terhadap konfigurasi sistem tersebut, apakah sebagai barisan, permutasi, kombinasi, atau sebagai multiset. Ahli fisika secara spesifik telah menetapkan tiga dari empat kemungkinan tersebut.

Jika partikel tersebut berbeda dan sebarang banyaknya partikel boleh menempati posisi tertentu, diperoleh konfigurasi. Sistem-sistem yang memenuhi asumsi ini digambarkan dengan statistik Maxwell-Boltzmann dan konfigurasinya dapat dipandang sebagai suatu barisan. Jika partikel-partikel tersebut identik, dan sebarang banyaknya partikel yang boleh menempati posisi tertentu, maka diperoleh konfigurasi. Sistem-sistem yang memenuhi asumsi seperti ini dapat digambarkan dengan statistik Bose-Einstein dan konfigurasinya dapat dipandang sebagai suatu multiset. Selanjutnya, jika partikel tersebut identik dan hanya boleh satu partikel yang menempati posisi tertentu, maka jumlah konfigurasinya ada sebanyak sistem-sistem yang memenuhi asumsi seperti ini dapat dijelaskan dengan statistik Fermi-Dirac dan konfigurasinya dapat dipandang sebagai suatu kombinasi.

Para ahli fisika tidak memberi nama untuk situasi yang dapat digambarkan sebagai permutasi. Asumsi untuk itu seringkali mudah disusun, tetapi harus dipahami bahwa tidak ada alasan kuat untuk memilih suatu asumsi lebih baik dari asumsi yang lain. Pilihan yang tepat di dalam suatu situasi nyata tergantung pada asumsi mana yang berkaitan langsung dengan pengetahuan empiris. Misalnya atom-atom atau molekul-molekul gas ideal pada suhu tertentu dapat digambarkan dengan tepat berdasarkan statistika Maxwell-Boltzmann, distribusi foton-foton dalam tingkat-tingkat energi tertentu memenuhi statistika Bose-Einstein, dan distribusi elektron-elektron pada tingkat energi tertentu dalam suatu atom akan dapat digambarkan dengan statistik Fermi-Dirac. Dengan kata lain, pada situasi dunia nyata mahasiswa harus memilih alternatif yang logis, atau jika tidak ada pilihan lain yang lebih tepat untuk menggambarkan suatu asumsi yang dirumuskan.

Contoh 2.57. Strategi dengan susunan

(a) Ada berapa cara menyusun huruf-huruf dalam kata KALENG sedemikian sehinga huruf-huruf vokalnya terletak berurutan secara alfabetis?

(b) Ada berapa cara menyusun huruf-huruf dalam kata KALENG sedemikian sehingga huruf-huruf vokalnya terletak berdampingan?

(c) Ada berapa cara menyusun huruf-huruf dalam kata BANDANAS sedemikian sehingga huruf-huruf vokalnya tidak terletak berdampingan?

Jawab.

(a) Terdapat 6 spasi untuk menempatkan enam huruf-huruf dalam kata KALENG. Konstruksi susunan huruf-huruf dengan cara ini dapat diuraikan menjadi tiga tahap. Tahap pertama dilakukban dengan memilih spasi untuk menempatkan huruf-huruf vokal. Cara ini dapat dilakukan dalam C(6,2) cara. Tahap kedua adalah menyisipkan vokal-vokal dalam urutan alfabetis, misalnya menempatkan A pada posisi paling awal dan E pada posisi paling akhir. Tahap ketiga adalah dengan menyisipkan konsonan pada posisi lainnya, yang dapat dilakukan dalam 4! Cara. Dengan menerapkan aturan perkalian, diketahui bahwa huruf-huruf dalam kata KALENG dapat disusun sedemikian sehinga huruf-huruf vokalnya terletak berurutan secara alfabetis dengan C(6,2).4! = 360 cara.

(b) Penyelesaian ini dapat dilakukan dalam dua tahap. Tahap pertama adalah dengan memastikan agar huruf-huruf vokalnya selalu terletak berdekatan. Jadi A dan E dapat disusun dalam dua cara yaitu AE atau EA. Tahap kedua adalah menempatkan huruf AE atau EA dengan empat huruf lainnya. Langkah ini dapat dilakukan dalam 5! Cara. Oleha karena itu berdasarkan aturan perkalian, diperoleh 2 x 5! = 240 cara.

(c) Sebelum menyusun langkah penyelesaian, mahasiswa sebaiknya membayangkan suatu strategi pencacahan. Dalam hal ini terdapat tiga vokal dan lima konsonan. Letak huruf-huruf uruf ini dapat dibayangkan sebagai susunan tiga V dan lima K. Pertama, mahasiswa dapat membayangkan banyaknya cara menyusun tiga V dan lima K tanpa adanya V yang berdekatan. Selanjutnya *V* dan K. diganti kembali dengan huruf yang sebenarnya.

KONSTRUKSI: Pada tahap pertama, dibuat susunan *V* dan K tanpa *V* yang berturutan. Letakkan *V* pada posisi yang diperbolehkan: *V_V_V*. Selanjutnya akan diletakkan setidak-tidaknya satu K di antara masing-masing *V* sehingga diperoleh susunan *VKVKV*. Kemudian K yang tersisa ditempatkan pada empat posisi yang mungkin yaitu di depan *V* yang pertama, di antara *V* yang pertama dan *V* yang kedua, di antara *V* yang kedua dan ketiga, dan posisi kanan setelah *V* yang ketiga. Penempatan ini ekivalen dengan pendistribusian tiga bola identik ke dalam empat kotak yang berbeda. Jadi tahap pertama dapat dilakukan dengan *C*(4-1+3,3) = 20 cara. Pada tahap kedua, setiap *V* diganti dengan huruf-huruf vokal. Karena ada huruf *A,* maka ketiga huruf tersebut hanya dapat dilakukan dalam satu cara. Langkah terakhir dilakukan dengan mengganti K dengan huruf-huruf konsonan. Dari contoh terakhir, cara ini dapat dilakukan dalam 5!/2! = 60 cara. Berdasarkan aturan perkalian, jawaban terhadap maslah ini adalah 20 x 60 = 1200.

Contoh. 2.58. Masalah Solusi Bulat dari Suatu Persamaan.

Ada berapa banyaknya solusi bulat dari $X_1 + X_2 + X_3 = 10,$ dengan $X_i \geq 0$?

Jawab. Salah satu solusinya adalah $X_1 = X_2 = 0$ dan $X_3 = 10.$ Untuk setiap variabel ini, dapat diandaikan bahwa ada 10 bola identik yang akan didistribusikan ke dalam tiga kotak. Banyaknya bola di dalam masing-masing kotak akan disesuaikan dengan nilai variabel terkait. Jadi persoalan ini ekivalen dengan banyaknya cara mendistribusikan 10 bola identik ke dalam tiga kotak berbeda, di mana setiap kotak berisi sebarang banyaknya bola atau *C*(3 – 1 + 10, 10) = 66.

Contoh 2.58 merupakan masalah solusi bulat dari suatu persamaan. Penjelasan yang telah dijabarkan dapat digeneralisasi dengan mudah, dan menunjukkan bahwa jika nilai variabel-variabelnya adalah builangan bulat nonnegatif, maka persoalan tersebut ekivalen dengan masalah multiset pendistribusian. Jadi, ketiga permasalahan di bawah ini adalah ekivalen.

(1) Ada berapa cara memilih *r* objek dari *n* objek dimana masing-masing objek dapat dipilih secara berulang.
(2) Ada berapa cara mendistribusikan *r* bola identik ke dalam *n* kotak berbeda, dimana setiap kotak dapat diisi sebarang banyaknya bola.
(3) Ada berapa solusi bulat dari persamaan $X_1 + X_2 + \cdots + X_n = r,$ dengan $X_i \geq 0.$

Contoh 2.59. Suatu perusahaan menghasilkan 10.000 chip komputer. Sampel yang diambil sebanyak 100 chip menunjukkan bahwa 5 di antaranya rusak. Berapakah peluang jika ditemukan *k* chip yang rusak?

Jawab. Ada *C*(10000,100) cara memilih 100 chip dari 10000 chip yang diproduksi. Kemudian akan ditentukan ada berapa cara memilih sampel yang di dalamnya terdapat 5 chip yang rusak. Pemilihan sampel dengan cara ini dapat dipilah menjadi dua tahap. Tahap pertama adalah memilih chip yang rusak dari *C*(*k*, 5) cara. Selanjutnya dipilih 95 chip yang tidak rusak dalam *C*(10000 – *k*, 95) cara. Mernurut aturan perkalian, banyaknya sampel tersebut adalah *C*(*k*, 5)*C*(10000 – *k*, 95). Oleh karena itu peluangnya adalah

$$\frac{C(k,5)C(10000-k,95)}{C(10000,100)}.$$

Jika sampel dipilih secara acak, maka diharapkan ada 500 chip yang rusak di antara semua chip yang diproduksi. Apakah angka harapan seperti itu dapat diterima secara formal? Kata kuncinya tergantung pada seberapa besar nilai *k* mempengaruhi kemungkinan yang akan terjadi. Faktanya, jika dipilih k = 500 maka kemungkinan akan semakin tinggi. Artinya dengan memilih k = 500 maka peristiwa yang benar-benar terjadi adalah kejadian yang paling mungkin terjadi. Untuk alasan ini, pilihan k = 500 disebut estimasi kemiripan maksimum (*maximum likelihood estimate.*)

Contoh 2.60. Paradoks De Mere

(a) Berapa peluang munculnya mata 6 dari peristiwa melempar satu dadu sebanyak empat kali?

(b) Berapa peluang munculnya mata dadu 6 dan 6 bersamaan jika dua dadu berbeda dilempar bersamaan sebanyak 24 kali?

Jawab. Kasus ini merupakan salah satu masalah peluang yang paling awal diketahui. Chevalier De Mere (1607 – 1684), seorang penjudi terkenal pada abad ke-17, menduga bahwa peluang dari kedua peristiwa tersebut adalah sama. Penjelasannya adalah bahwa ada 6 kemungkinan yang akan terjadi jika satu dadu dilempar. Salah satu kemungkinan dari keenam kemungkian tersebut adalah munculnya mata 6. Untuk menghasilkan terjadinya salah satu peluang ini, maka dadu dilempar sebanyak 2/3 kali dari total kemungkinan yang bisa terjadi. Jadi dalam peristiwa melampar dua dadu bersamaan, terdapat 36 kemungkinan yang akan muncul. Salah satunya adalah munculnya mata 6 dan 6 bersamaan. Jika kedua dadu dilempar sebanyak 24 kali, maka diharapkan angka tersebut muncul.

De Mere juga telah mengetahui berdasarkan hasil pengamatannya bahwa peluang pertama akan lebih besar dari ½ karena itu peluang kedua akan lebih kecil dari ½. Menurut De Mere, paradoks ini mencerminkan suatu inkonsistensi yang mendasar di dalam matematika. Hal ini disampaikannya kepada Pascal kemudian Pascal meneruskannya kepada Fermat. Korespondensi antara Pascal dan Fermat mengenai paradoks ini banyak menghasilkan temuan tentang probabilitas dan kombinatorika.

(a) Banyaknya cara melemparkan satu dadu sebanyak 4 kali adalah 6^4. Untuk menentukan banyaknya cara yang mungkin diperoleh dari peristiwa melemparkan dadu sebanyak empat kali dan memperoleh setidak-tidaknya satu kali 6 tidak mudah ditentukan secara langsung. Jadi dimisalkan banyaknya kemungkinan tersebut adalah M. Selanjutnya misalkan N adalah banyaknya cara yang mungkin diperoleh dari peristiwa melempar dadu 4 kali, dan O adalah banyaknya kemungkinan yang akan diperoleh dari peristiwa melempar dau sebanyak empat kali, tanpa munculnya mata 6. Menurut aturan penjumlahan, $N = M + O$, maka $M = N - O$. Sudah diketahui bahwa $N = 6^4$. Untuk menentukan O, maka peristiwa melempar satu dadu sebanyak 4 kali tanpa munculnya mata 6 menjadi 4 tahap. Masing-mnasing tahapan terdiri atas lima kemungkinan, sehingga $O = 5^4$. Jadi $M = 6^4 - 5^4$, dan probabilitasnya adalah

$$\frac{6^4 - 5^4}{6^4} = 0,5177.$$

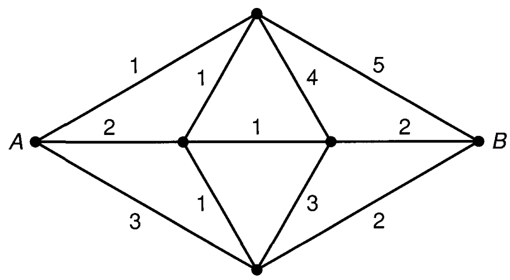
(b) Dengan cara yang sama, diketahui bahwa peluang munculnya mata dadu 6 dan 6 bersamaan jika dua dadu berbeda dilempar bersamaan sebanyak 24 kali adalah

$$\frac{36^{24} - 35^{24}}{36^{24}} = 0,4914.$$

E. Soal-Soal Latihan

1. Hitunglah:
   a. $C(10,8)$
   b. $C(5,2)C(6,2)$
   c. $C(5,1)/C(7,7)$
2. Sederhanakan:
   a. $C(n,0)$
   b. $C(n,1)$
   c. $C(n,n-1)$
   d. $C(n,n)$
3. Hitunglah:
   a. $P(8,4)$
   b. $P(7,0)$
   c. $P(n,1)$
   d. $\frac{P(4,2)}{P(6,3)}$
4. Buktikan bahwa $P(n,n) = P(n,n-1)$
5. Ada berapa kata berbeda yang dapat disusun dengan menggunakan kata-kata berikut ini?
   a. ALLELE
   b. BANANA
   c. PAPAYA
   d. BUBBLE
   e. ALABAMA
   f. TENNESSEE
   g. HALEAKALA
   h. KAMEHAMEH
   i. MATHEMATICS

6. Suatu dewan kota terdiri atas tujuh orang anggota, akan memilih seorang walikota dan wakil walikota dari antara ketujuh orang anggota dewan kota tersebut. Ada berapa cara pemilihan dapat disusun?
7. Berapa cara yang dapat dilakukan untuk membagikan tiga buah yang berbeda kepada lima orang anak sehingga seorang anak hanya dapat menerima satu buah? Jika seorang anak dapat menerima sebarang banyaknya buah?
8. Misalkan terdapat berbagai buah-buahan dengan varietas yang berbeda di dalam suatu toko buah.
   (a) Ada berapa cara lima orang dapat memilih buah masing-masing satu?
   (b) Ada berapa cara lima orang dapat memilih buah masing-masing satu, masing-masing varietas?
   (c) Ada berapa cara setiap orang memilih dua buah untuk setiap varitas yang berbeda?
   (d) Ada berapa cara setiap orang memilih sebarang dua buah?
9. Ada berapa digit dalam bilangan 272! ?
10. Pada diagram graf di bawah ini, tentukan semua lintasan terpendek yang dapat ditempuh dari A ke B. Panjang lintasan ditandai dengan angka-angka pada masing-masing jalur.



11. Sebuah perusahaan akan merekrut 3 orang karyawan dari 8 orang pelamar. Ada berapa cara memilih 3 karyawan tersebut jika
    a. Ketiga karyawan tersebut ditempatkan pada jenis pekerjaan sama
    b. Ketiga karyawan tersebut ditempatkan pada tiga jenis pekerjaan berbeda
12. Diberikan balok berhuruf A, B,C,D, E, F (setidaknya ada 10 buah balok untuk tiap huruf) Ada berapa rangkaian 5 huruf dimana urutan tidak diperhatikan dan boleh ada pengulangan jika:
    a. Tidak ada syarat lain
    b. Tepat ada 2 huruf A
    c. Minimal ada 3 huruf A
    d. Maksimal ada 2 huruf A

13. Dari huruf a-z diambil 5 buah huruf, 3 konsonan dan 2 vocal menjadi suatu kata yang hurufnya tidak boleh berulang,
    b. Ada berapa kata yang bisa dibentuk?
    c. Jika harus diawali K dan diakhiri huruf L, berapa kata yang bisa dibentuk?
    d. Jika harus ada huruf K, berapa kata yang bisa dibentuk?
    e. Jika harus ada huruf K dan L, berapa kata yang bisa dibentuk?
    f. Jika harus ada huruf K dan A, berapa kata yang bisa dibentuk?
14. Sebuah toko kaos menjual hanya menjual 2 jenis warna kaos yaitu berwarna merah dan biru. Berapa banyak cara memilih 5 buah kaos?
15. Lima orang mahasiswa (3 pria dan 2 wanita) ingin menemui kaprodi untuk meminta penambahan kelas. Kaprodi hanya bersedia ditemui oleh 3 utusan yang terdiri dari setidaknya 1 wanita. Berapa kemungkinan pembentukan 3 utusan tersebut?
16. Berapa banyak kata yang dapat dibentuk dari kata 'TELEVISI'?
17. Sebuah toko buah hanya menjual 5 jenis buah yaitu semangka, jeruk, nenas, pepaya dan melon (tiap jenis > 10 buah). Berapa banyak cara memilih 3 buah?
18. Seorang dosen memberi 6 buah soal kepada mahasiswa dengan syarat setiap mahasiswa harus mengerjakan 5 buah soal saja dan soal no 1 wajib dikerjakan. Ada berapa cara memilih soal tersebut?
19. Sebuah toko pakaian hanya menyediakan 4 model pakaian. Berapa cara memilih 6 pakaian ?
20. Lomba cepat-tepat diikuti oleh 6 grup peserta yang masing-masing terdiri dari 3 orang. Peserta dalam 1 grup harus duduk berdampingan.
    a. Jika semua peserta duduk dalam 1 baris, berapa cara yang didapat untuk menyusun mereka
    b. Jika semua peserta duduk dalam 1 lingkaran, berapa cara yang didapat untuk menyusun
21. Tentukan banyaknya cara agar 4 buku matematika, 3 buku sejarah, 3 buku kimia, dan 2 buku sosiologi dapat disusun sedemikian sehingga
    a. semua buku yang topiknya sama letaknya bersebelahan,
    b. urutan buku dalam susunan bebas.
22. Tentukan banyaknya "kata" yang terbentuk dari huruf-huruf dalam kata "SELEBES" jika:
    a. setiap "kata" berawal dengan huruf E dan berakhir dengan E,
    b. pada setiap "kata", tiga huruf E berdampingan satu sama lain.

23. Palindrom adalah barisan karakter (huruf atau angka) yang bila dibaca dari depan atau dari belakang adalah sama. Contoh: KATAK, MALAM, 21477412, 36963. Untuk soal ini kita hanya meninjau palindrom yang dibentuk dari barisan angka. Berapa banyak bilangan palindrom 9-angka yang dapat dibentuk dari angka 0, 1, …, 9 dengan ketentuan tidak boleh ada pengulangan angka pada setengah bagian (misalnya, 366191663 tidak dibenarkan karena 6 dipakai 2 kali)?
24. Dari 5 buah apel dan 4 buah jeruk, ingin dipilih 4 buah dimana diantaranya harus ada paling sedikit 2 buah jeruk. Berapa cara memilihnya?
25. Jika suatu toko menjual 3 ukuran T-Shirt dengan 6 warna berbeda, dan setiap T-Shirt bisa bergambar naga, buaya atau tidak bergambar sama sekali, berapa jenis T-Shirt berbeda yang dapat anda beli?
26. Berapa banyak bilangan berdigit 3 yang kurang dari 400 yang bisa dibentuk dari 6 angka 2,3,4,5,7,9 dan pengulangan tidak diperbolehkan?
27. Ada berapa bilangan bulat genap antara 1 dengan 99?
28. Sebuah koin dilemparkan sebanyak 30 kali. Ada berapa kemungkinan kombinasi munculnya gambar dan angka?
29. Ada berapa cara menjawab 50 butir soal pilihan ganda jika 20 butir di antaranya terdiri atas 3 pilihan, dan 30 butir di antaranya terdiri atas 5 pilihan.
30. Tes penerimaan mahasiswa baru terdiri atas 20 butir soal B-S, dan 80 butir soal pilihan ganda. Jika soal pilihan ganda terdiri atas 5 pilihan jawaban dan jawaban dipilih secara acak, ada berapa cara menjawab untuk memperoleh skor 100? Berapa kemungkinan diperoleh skor 100 jika seorang peserta tes menjawab secara acak?
31. Nomor plat kendaraan di suatu negara terdiri atas 3 huruf diikkuti 4 angka. Ada berapa nomor plat kendaraan yang dapat dibuat jika setiap nomor dan angka dapat berulang? Jika angka saja yang boleh berulang?
32. Ada berapa bilangan bulat antara 100 dan 999 yang semua angkanya berbeda? Berapa bilangan ganjil?
33. Berapa kalikah angka 3 ditulis dalam barisan bilangan 1 sampai dengan 1000?
34. Ada berapa cara menyusun huruf-huruf dalam kata KOMPUTER sedemikian sehingga huruf vokal terletak berdekatan?

BAB III
PERMUTASI DAN KOMBINASI

Mungkin masih ada mahasiswa yang kesulitan membedakan permutasi dengan kombinasi. *Which one is which*? Analogi di bawah ini mungkin dapat membantu: misalkan terdapat tiga orang mahasiswa, misalkan Alim, Berndina, dan Charlie terdaftar sebagai anggota dari suatu kelompok diskusi. Urutan nama tadi menunjukkan Ketua, Wakil dan Anggota. Tentu saja daftar nama tersebut berbeda jika urutan nama diubah menjadi Charlie, Berndina dan Alim. Suatu daftar anggota dengan urutan berbeda yang memiliki arti berbeda seperti itu merupakan **permutasi.** Demikian juga jika akan dibentuk suatu susunan bilangan yang terdiri atas angka-angka $1, 2, 3, 4$. Untuk membentuk bilangan yang dimaksud, maka angka-angka tersebut harus disusun. Bilangan-bilangan berbeda yang akan terbentuk tergantung pada urutan angka-angka digunakan. Ini merupakan contoh *permutasi.*

Sebaliknya, **kombinasi** terdengar lebih sederhana. Misalkan daftar nama Alim, Berndina dan Charlie adalah tiga anggota paduan suara. Sudah jelas juga bahwa daftar dan urutan nama tersebut sama saja jika dibalik menjadi Charlie, Berndina dan Alim. Hal yang sama berlaku jika akan dibentuk satu tim sepakbola dari 20 orang. Pembentukan tim ini merupakan contoh *kombinasi*, karena urutan pemain yang dipilih dalam tim tidak akan mengubah susunan tim sepakbola tadi. Bagaimanapun urutan pemain didaftarkan, anggota tim sepakbola tetap sama.*Dalam permutasi urutan diperhatikan karena jika urutan berubah maka maknanya juga berubah. Sedangkan pada kombinasi urutan tidak diperhatikan. Perubahan urutan daftar nama anggota paduan suara tidak mengakibatkan perubahan makna*. Kode kombinasi untuk membuka brankas seharusnya dinamakan kode permutasi, karena angka-angka yang digunakan harus diperhatikan urutannya.

A. Permutasi

Permutasi: Permutasi adalah susunan dari objek-objek, dimana urutan objek-objek tersebut diperhitungkan. Banyaknya permutasi dari *n* objek berbeda yang diambil sejumlah *r* setiap kali pengambilan, dinyatakan dengan

$$P(n,r) = {}^{n}P_{r} = {}_{n}P_{r} = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad (3.10)$$

Bukti. Misalkan terdapat *n* objek berbeda yaitu $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$. Jelas bahwa posisi tempat pertama dapat diisi dengan *n* cara. Banyaknya objek yang sisa setelah posisi tempat pertama diisi ada sebanyak $(n-1)$. Jadi posisi kedua dapat diisi dengan $(n-1)$ cara. Demikian seterusnya, posisi ketiga dapat diisi dengan $(n-2)$ cara karena objek yang tersisa setelah posisi pertama dan kedua adalah $(n-2)$.

Jadi,

banyaknya cara mengisi tempat pertama adalah *n*.

banyaknya cara mengisi tempat kedua adalah $(n-1)$

banyaknya cara mengisi tempat ketiga adalah $(n-2)$

banyaknya cara mengisi tempat ke-*r* adalah $n-(r-1)=n-r+1$

Berdasarkan aturan perkalian, jumlah semua cara mengisi tempat pertama, kedua, ketiga, sampai dengan ke-*r* secara bersamaan adalah $n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$.

Dengan demikian,

$$
\begin{aligned}
P(n,r) &= n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \\
&= [n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)]\frac{[(n-r)(n-r-1)\cdots 3.2.1]}{[(n-r)(n-r-1)\cdots 3.2.1]} \\
&= \frac{[n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)][(n-r)(n-r-1)\cdots 3.2.1]}{[(n-r)(n-r-1)\cdots 3.2.1]} \\
&= \frac{n!}{(n-r)!}
\end{aligned}
$$

Banyaknya permutasi *n* objek berbeda yang diambil sekaligus pada setiap kali pengambilan adalah $P(n,n)=n!$

Bukti:

Akan diletakkan *n* objek ke dalam *n* posisi.

Banyaknya cara mengisi posisi pertama ada *n* cara.

Banyaknya cara mengisi posisi kedua ada $(n-1)$ cara.

Banyaknya cara mengisi posisi ketiga ada $(n-2)$ cara.

Banyaknya cara mengisi posisi ke-*r* yaitu posisi terakhir, ada 1 cara.
Banyaknya keseluruhan cara mengisi tempat pertama, kedua, ketiga, sampai ke-*n,* adalah
$n(n-1)(n-2)\cdots 3.2.1 = P(n,n) = n!$ cara.

Konsep: Diketahui bahwa

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Jika $r = n$, maka $P(n,n) = n!$

Jadi $P(n,r) = \frac{P(n,n)}{(n-r)!} \Rightarrow (n-r)! = \frac{P(n,r)}{P(n,n)}$

Karena $r = n$, maka $(n-n)! = 0! = \frac{P(n,n)}{P(n,n)} = 1$

Catatan: Faktorial bilangan negatif tidak didefinisikan. Pernyataan -3! Tidak memiliki makna.

Partisi dari suatu himpunan adalah kumpulan subset-subset $S_1, S_2, S_3, \cdots, S_m$ dari himpunan *S* sedemikian sehingga masing-masing elemen yang ada di dalam himpunan *S* merupakan salah satu subsetnya.

$$S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_m, \tag{3.11}$$

$$S_i \cap S_j = \varnothing,\ (i \neq j).$$

Subset-subset $S_1, S_2, S_3, \cdots, S_m$ disebut bagian dari partisi. Menurut definisi, bagian dari suatu partisi dapat berbentuk himpunan kosong, tetapi tidak ada pentingnya jika suatu pertisi memiliki satu atau beberapa bagian yang merupakan himpunan kosong. Banyaknya objek (anggota) himpunan *S* dilambangkan dengan |*S*| atau $n(S)$ dan sering disebut juga ukuran *S*.

A.1. Prinsip Penjumlahan

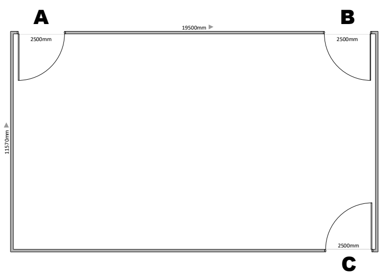
Misalkan suatu himpunan *S* dipartisi menjadi $S_1, S_2, S_3, \cdots, S_m$. Banyaknya objek dalam himpunan *S* dapat diketahui dengan cara menghitung banyaknya objek di dalam masing-masing bagian himpunan kemudian menjumlahkannya secara keseluruhan, sehingga diperoleh:

$$|S| = |S_1| + |S_2| + |S_3| + \cdots + |S_m|. \tag{3.12}$$

Jika ada anggota dari himpunan-himpunan $S_1, S_2, S_3, \cdots, S_m$ yang merupakan anggota himpunan irisan, maka banyaknya anggota himpunan *S* dapat diketahui dengan menggunakan Prinsip Inklusi-Eksklusi.

Prinsip penjumlahan dapat dinyatakan secara ringkas bahwa jika suatu percobaan dapat dilakukan dengan *n* cara, dan percobaan lainnya dilakukan dengan *m* cara, maka kedua percobaan tersebut dapat dilakukan dengan *m* + *n* cara. Aturan ini dapat diperluas sampai sebarang jumlah percobaan yang berhingga.

Contoh 3.1. Misalkan terdapat 3 pintu di dalam suatu ruangan, 2 pintu terpasang pada salah satu sisi yang sama dan satu pintu pada sisi lainnya. Jika seseorang akan keluar dari ruangan tersebut, tentu saja ada 3 pilihan untuk melakukannya. Orang tersebut dapat keluar ruangan melalui pintu A, B atau C.



Contoh 3.2. Seorang mahasiswa ingin mengetahui banyaknya matakuliah yang dijalankan di dalam lingkungan universitas selama satu semester. Untuk itu, mahasiswa mempartisi daftar semua matakuliah yang dijalankan berdasarkan mata kuliah masing-masing program studi. Dengan asumsi tidak ada mata kuliah yang sama pada dua program studi yang berbeda, maka banyaknya mata kuliah yang dijalankan di universitas dalam semester tersebut adalah jumlah mata kuliah yang dijalankan pada masing-masing program studi.

Contoh 3.3. Seorang mahasiswa akan memprogramkan matakuliah Matematika Diskrit atau matakuliah Teori Bilangan, tetapi tidak kedua-duanya. Jika kuliah Matematika Diskrit ada 4 kelas dan Teori Himpunan ada 3 kelas, maka mahasiswa tersebut dapat memilih kelas dari kedua matakuliah dengan 4+3=7 cara.

A.2. Prinsip Perkalian

Misalkan *S* adalah himpunan pasangan berurutan objek-objek (a, b) dimana objek *a* berasal dari himpunan yang berukuran *p* (banyaknya anggota himpunan = *p*) dan untuk setiap pilihan objek *a* ada *q* cara memilih objek *b*. Dengan demikian ukuran dari *S* adalah $p x q$, dan dinyatakan dengan $|S| = p \text{ x } q$.

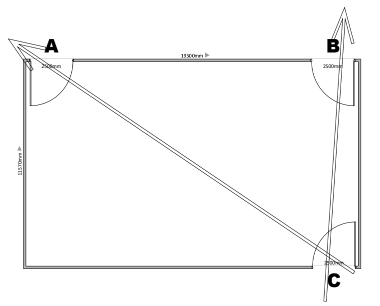
Prinsip perkalian pada dasarnya adalah konsekuensi dari prinsip penjumlahan. Misalkan $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_p$ adalah *p* cara memilih objek *a*. Kemudian himpunan *S* dipartisi menjadi $S_1, S_2, S_3, \cdots, S_p$ dengan S_i adalah himpunan pasangan berurutan di *S* yang objek pertamanya adalah $a_i, (i = 1, 2, 3, \cdots, p)$. Ukuran masing-masing S_i adalah *q*, oleh karena itu menurut prinsip penjumlahan,

$$\begin{aligned} |S| &= |S_1| + |S_2| + |S_3| + \cdots + |S_p| \\ &= q + q + q + \cdots + q \text{ (q sebanyak p)} \\ &= p \text{ x } q. \end{aligned}$$

Formulasi kedua dari prinsip perkalian adalah sebagai berikut: *Jika suatu peristiwa pertama terjadi sebanyak p dengan cara bagaimanapun, dan peristiwa kedua dapat terjadi sebanyak q, maka kedua peristiwa tersebut dapat terjadi sebanyak p* x *q.*

Ringkasnya, prinsip perkalian menyatakan bahwa jika suatu pekerjaan dapat diselesaikan dalam *m* cara dan pekerjaan lainnya dapat diselesaikan dalam *n* cara, maka kedua pekerjaan tersebut dapat diselesaikan dengan *m* x *n* cara. Aturan ini juga dapat diperluas untuk sebarang jumlah pekerjaan yang berhingga.

Contoh 3.4. Jika seseorang ingin melintasi ruangan yang memiliki 2 pintu pada satu sisi dan 1 pintu pada sisi lainnya, maka ada 2 x 1 cara untuk melakukannya.



Faktorial *n*:

Hasilkali dari *n* bilangan asli pertama dilambangkan dengan *n*!

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3.2.1$$

Contoh 3.5. Buktikan bahwa 0! = 1

Bukti. $n! = n(n-1)! \Rightarrow (n-1)! = \frac{n!}{n}$. Untuk *n* = 1, diperoleh $(1-1)! = \frac{1!}{1} = 1$

Contoh 3.6. Seorang mahasiswa akan memprogramkan dua matakuliah. Matakuliah pertama dilaksanakan 3 kelas pada pagi hari, dan mata kuliah kedua dilaksanakan 4 kelas sore hari. Banyaknya jadwal yang dapat diikuti mahasiswa tersebut ada sebanyak $3 \times 4 = 12$.

Permutasi adalah banyaknya cara untuk menyusun *k* elemen dari *n* elemen $(k \leq n)$ dengan ***urutan diperhatikan.***

$$P(n,k) = P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!} \tag{3.13}$$

$$P(n,n) = P_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n! \quad \text{dengan } 0! = 1.$$

Permutasi $P(n,n)$ sering disebut permutasi *n* objek karena permutasi tersebut sekaligus meliputi keseluruhan objek yang ada.

Contoh 3.8. Tulislah semua permutasi 3 objek $\{a,b,c\}$.

Jawab. Permutasi yang mungkin dari 3 objek $\{a,b,c\}$ ada 3! = 6 kemungkinan yaitu: *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cba*, *cab*.

Contoh 3.9. Suatu undian dilakukan dengan menggunakan angka yang terdiri dari 7 digit. Jika digit-digit dalam suatu angka harus berbeda satu dengan yang lain, ada beberapa kemungkinan nomor undian?

Jawab. Dalam undian tersebut, jelas urutan kemunculan angka-angka diperhatikan. Undian dengan nomor 1234567 akan berbeda dengan nomor 7654321. Karena digit-digitnya diharuskan selalu berbeda, maka banyaknya kemungkinan nomor undian adalah $P(10,7) = \frac{10!}{3!} =$ 10 x 9 x 8 x 7 x 6 x 5 x 4 = 604800 macam kemungkinan.

A.3. Urutan Lexicografic

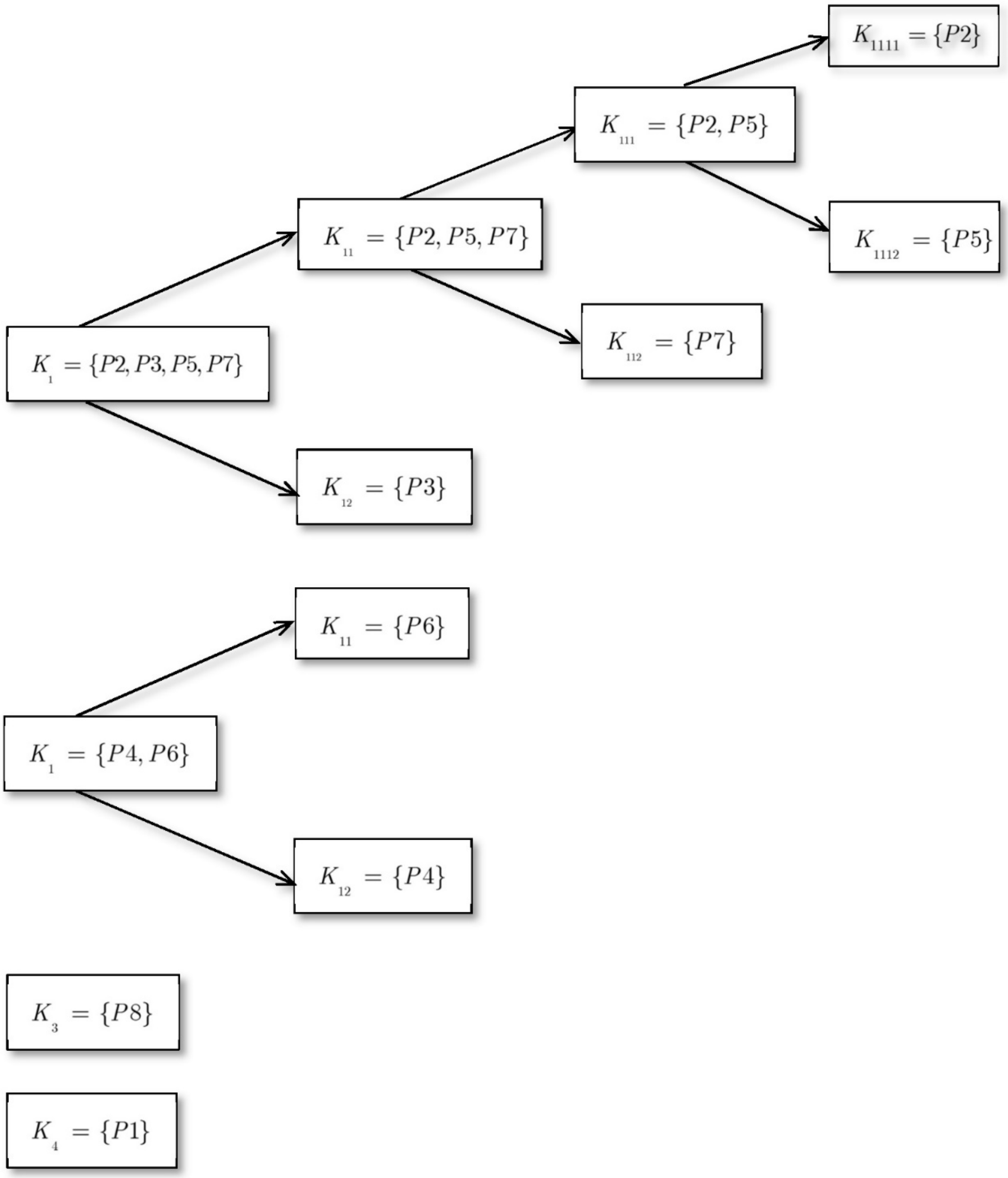
Misalkan: $P_a = a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ dan $P_b = b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n$ adalah permutasi atas *n* elemen, P_a dikatakan mendahului P_b pada urutan (LO) jika terdapat *k* ($1 < k < n$) sedemikian sehingga $a_i = b_i$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$ dan $a_k < b_k$.

Contoh 3.10. Diketahui 8 buah permutasi atas 6 elemen :

P1 = 542361	P2 = 213465	P3 = 234651	P4 = 356214
P5 = 213645	P6 = 315624	P7 = 214635	P8 = 421365

Tentukan urutan dari 8 permutasi tersebut dalam urutan *lexicografic*!

Jawab.



Jadi urutan lexicografic $= P2 \rightarrow P5 \rightarrow P7 \rightarrow P3 \rightarrow P6 \rightarrow P4 \rightarrow P8 \rightarrow P1$

Jika diketahui permutasi atas *n* elemen yaitu $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ maka permutasi berikutnya dalam urutan lexico grafic adalah $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n$ akan memenuhi syarat sebagai berikut:

1. $a_i = b_i, \quad 1 < i < (k-1)$ dengan mengambil *k* sebesar mungkin.

2. b_k = minimum dari $a_{k+1}, a_{k+2}, \cdots, a_n$ yang lebih besar dari a_k.

3. $b_{k+1} < b_{k+2} < \cdots < b_n$

Contoh 3.11. Tentukan urutan semua permutasi atas 4 elemen $(1,2,3,4)$

Jawab.

1234	1243	1324	1342	1423	1432
2134	2143	2314	2341	2413	2431
3124	3142	3241	3214	3412	3421
4123	4132	4213	4231	4312	4321

A.4. Permutasi Dengan Elemen Yang Sama

Secara umum, jika suatu himpunan terdiri dari *n* objek yang tersusun dari:

n_1 buah objek sama jenis-1

n_2 buah objek sama jenis-2

------

n_k buah objek sama jenis-k.

dengan $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k = n$

Maka banyaknya permutasi berbeda yang mungkin dari n objek tersebut adalah:

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\cdots\cdots\binom{n-n_1-n_2-\ldots-n_k-1}{n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

Contoh 3.12. Ada berapa banyak cara yang mungkin dari kata MATEMATIKA ?

Jawab. Kata MATEMATIKA terdiri dari 10 karakter huruf, yang tersusun dari :

2 buah huruf M

3 buah huruf A

2 buah huruf T

1 buah huruf E

1 buah huruf I

1 buah huruf K

Sehingga banyaknya kemungkinan untuk membuat permutasi adalah :

$$\frac{10!}{2!\ 3!\ 2!\ 1!\ 1!\ 1!} = \frac{10.9.8.7.6.5.4}{1.2.1.2.1.1.1} = \frac{604800}{4} = 151200$$

banyaknya cara menyusun elemen-elemen tersebut. Beberapa contoh yang sama ditunjukkan berikut ini.

1). Ada berapa cara 4 orang mahasiswa (w, x, y, z) menempati kursi yang disusun dalam satu baris?

Jawab.
4P4 = 4!
= 4 x 3 × 2 × 1
= 24 cara

2). Pengurus Badan Eksekutif Mahasiswa (BEM) akan dipilih dua orang untuk menjabat sebagai ketua dan wakil ketua. Calon yang ditetapkan memenuhi syarat ada 6 orang. Berapa pasang calon yang dapat terpilih untuk menjabat ketua dan wakil ketua?

Jawab.
6P2 = 6!/(6-2)!
= (6.5.4.3.2.1)/(4.3.2.1)
= 720/24
= 30 cara

3). Sekelompok mahasiswa yang terdiri dari 10 orang akan mengadakan rapat dan duduk mengelilingi sebuah meja. Ada berapa carakah kelima mahasiswa tersebut dapat diatur pada sekeliling meja tersebut?

Jawab.
P5 = (10-1)!
= 9.8.7.6.5.4.3.2.1
= 362880 cara

4). Berapa banyak susunan huruf yang terbentuk dari kata “SIANG”?
Jawab.
5! = 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 120 buah kata

5). Peluang lulusan FKIP dapat bekerja pada suatu sekolah adalah 0,75. Jika seorang lulusan FKIP mendaftarkan pada 24 sekolah, maka berapakah dia dapat diterima oleh sekolah?

Jawab.

Frekuensi harapan kejadian A adalah $Fh(A) = n \times P(A)$

Diketahui $P(A) = 0,75$ dan $n = 24$. Maka:

$Fh(A) = 24 \times 0,75 = 18$ sekolah.

6). Terdapat tiga orang (X, Y dan Z) yang akan duduk bersama di sebuah bangku. Ada berapa urutan yang dapat terjadi ?

Jawab.

$nPx = n!$

$3P3 = 3!$

$= 1 \times 2 \times 3$

= 6 cara (XYZ, XZY, YXZ, YZX, ZXY, ZYX).

7). Suatu kelompok belajar yang beranggotakan empat orang (A, B, C dan D) akan memilih ketua dan wakil ketua kelompok. Ada berapa alternatif susunan ketua dan wakil ketua dapat dipilih ?

Jawab.

$nPx = (n!)/(n-x)!$

$4P2 = (4!)/(4-2)!$

= 12 cara (AB, AC, AD, BA, BC, BD, CA, CB, CD, DA, DB, DC) .

8). Berapa banyaknya permutasi dari cara duduk yang dapat terjadi jika 8 orang disediakan 4 kursi, sedangkan salah seorang dari padanya selalu duduk dikursi tertentu.

Jawab.

Jika salah seorang selalu duduk dikursi tertentu maka tinggal 7 orang dengan 3 kursi kosong. Maka banyaknya cara duduk ada $7P3 = 7!/(7-3)! = 210$ cara.

9). Tentukan banyaknya permutasi siklus dari 3 objek yaitu A, B, C.

Jawab.

Jika A sebagai urutan I : ABC

Jika B sebagai urutan I : BCA

Jika C sebagai urutan III : CAB

Jika banyak unsur $n = 4$: A, B, C, D

Jadi banyaknya permutasi siklis 4 unsur (A B C D) ada 4!/4 = 4.3.2.1/4 = 6

B. Permutasi Keliling

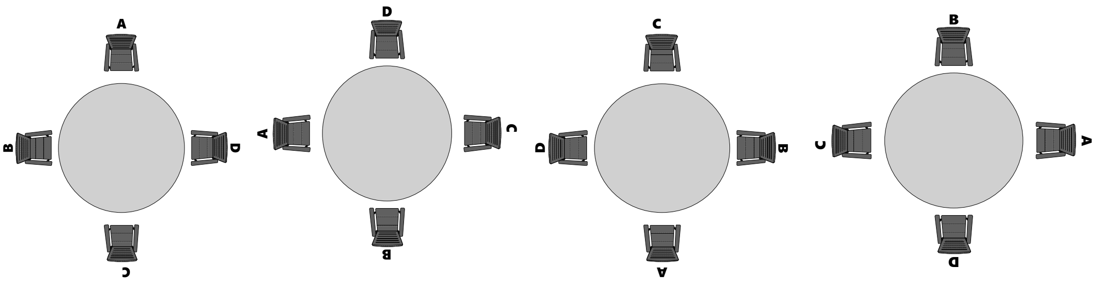
Ada dua bentuk permutasi keliling yaitu:

(a) Jika putaran keliling yang searah jarum jam dibedakan dengan putaran keliling yang berlawanan arah jarum jam, maka banyaknya permutasi ada $(n-1)!$

(b) Jika putaran keliling yang searah jarum jam tidak dibedakan dengan putaran keliling yang berlawanan arah jarum jam, maka banyaknya permutasi ada $\frac{(n-1)!}{2!}$

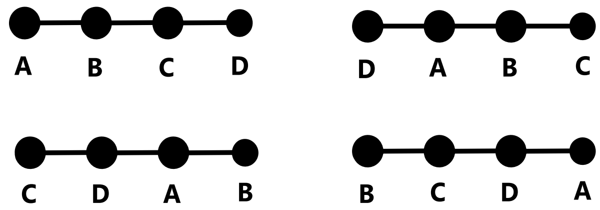
Bukti:

(a) Misalkan 4 orang (A, B, C, dan D) duduk mengelilingi satu meja. Jika masing-masing orang bergeser satu kali berlawanan arah jarum jam, maka akan terbentuk susunan sebagai berikut:



Gambar 3.1. Permutasi keliling

Jadi jika empat orang duduk mengelilingi meja dan akan bergeser masing-masing satu kali berlawanan arah jarum jam, maka keempat orang tersebut dapat bergeser sebanyak empat kali. Tetapi susuan yang keempat tidak dihitung lagi, karena masing-masing orang sudah kembali duduk di tempatnya. Berbeda masalahnya jika A, B, C, D, duduk dan bergeser ke kiri atau ke kanan pada suatu bangku panjang akan ada empat jenis susunan posisi duduk yang berbeda.



Gambar 3.2. Posisi duduk empat orang

Jika ada 4 objek maka banyaknya susunan linier yang dapat dibentuk dari masing-masing susunan melingkar adalah 4. Demikian juga, jika terdapat *n* objek, maka untuk masing-masing susunan melingkar, dapat dibentuk *n* susunan linier. Jika terdapat *p* susunan melingkar maka total susunan linier yang dapat dibentuk adalah *n.p.* Jika jumlah total susunan-linier = *n* atau banyaknya susunan-melingkar = 1 maka $n = 1(n!)/n$ permutasi keliling = $(n-1)!$

(b) Jika arah bergesernya masing-masing orang searah jarum jam dan berlawanan arah jarum jam tidak dibedakan, maka permutasi kedua cara geser tersebut dianggap sama. Dalam kasus ini, dua permutasi akan dianggap satu. Jadi total permutasi yang ada akan dibagi dua, yaitu $(n-1)!/2$.

Banyaknya permutasi keliling dari *n* objek berbeda yang diambil sebanyak *r* setiap kali pengambilan dapat dijelaskan sebagai berikut:

(a) Jika putaran yang searah jarum jam dibedakan dengan putaran yang berlawanan arah jarum jam, maka total permutasi keliling yang terjadi adalah $P(n,r)/r$.

(b) Jika putaran yang searah jarum jam dianggap sama dengan putaran yang berlawanan arah jarum jam, maka total permutasi keliling yang terjadi adalah $P(n,r)/2r$.

Contoh 3.13. Ada berapa banyak kalung yang terdiri atas 12 manik-manik jika terdapat 18 manik-manik yang berbeda-beda warnanya?

Jawab. Manik-manik yang disusun searah jarum jam sama dengan susunan yang berlawanan arah jarum jam. Dengan demikian, total jumlah permutasi keliling yang dapat dibentuk ada sebanyak $\dfrac{P(18,12)}{2 \text{ x } 12} = \dfrac{18!}{6! \text{ x } 24}$

C. Permutasi Berhingga

(a) Banyaknya permutasi dari *n* objek yang diambil sebanyak *r* setiap kali pengambilan, jika objek tertentu selalu muncul dalam setiap susunan adalah $\mathrm{r\ x\ P}(\mathrm{n}-1,\mathrm{r}-1)$

(b) Banyaknya permutasi dari *n* objek yang diambil sebanyak *r* setiap kali pengambilan, jika objek tertentu ditetapkan: $\mathrm{P}(\mathrm{n}-1,\mathrm{r}-1)$

(c) Banyaknya permutasi dari n objek yang diambil sebanyak r setiap kali pengambilan, jika objek tertentu tidak pernah diambil: $\mathrm{P}(\mathrm{n}-1,\mathrm{r})$

(d) Banyaknya permutasi dari n objek yang diambil sebanyak r setiap kali pengambilan, jika m objek tertentu selalu muncul bersamaan = $\mathrm{m}!\ \mathrm{x}\ (\mathrm{n}-\mathrm{r}+1)!$

(e) Banyaknya permutasi dari n objek yang diambil semua setiap kali pengambilan, jika m objek tertentu selalu muncul bersamaan: $\mathrm{n}!-[\mathrm{m}!\ \mathrm{x}\ (\mathrm{n}-\mathrm{r}+1)!]$

Contoh 3.14.

1) Ada berapa banyak kata dapat dibentuk dari kata OMEGA jika:
   (a) ‘O’ dan ‘A’ secara bersama-sema selalu berada di akhir kata.
   (b) ‘E’ selalu berada di tengah-tengah kata
   (c) Huruf-huruf vokal selalu terletak pada posisi urutan ganjil
   (d) Huruf-huruf vokal tidak pernah berdampingan

Jawab.

(a) Jika huruf-huruf O dan A selalu berada di akhir kata: M-E-G-(OA)
Letak (OA) selalu tetap, di akhir kata. Dengan demikian M-E-G dapat disusun dalam 3! Cara. Tetapi (OA) sendiri dapat disusun dalam 2! cara. Oleh karena itu, total susunan kata yang dapat dibentuk ada sebanyak $3!\ \mathrm{x}\ 2!=12$ cara.

(b) Jika ‘E’ tetap berada di posisi tengah: O-M-(E)-G-A, maka empat huruf lainnya, yaitu O-M-G-A dapat disusun dalam 4! yaitu sebanyak 24 cara.

(c) Huruf-huruf vokal yang masing-masing selalu terletak pada posisi urutan ganjil (pertama, ketiga, kelima) dapat disusun dalam 3! = 6 cara, dan dua konsonan (M-G) yang terletak pada posisi urutan genap (kedua, keempat) dapat disusun dalam 2! cara. Jadi secara keseluruhan, cara menyusun huruf vokal yang masing-masing terletak pada posisi urutan ganjil dan huruf-huruf konsonan selalu pada posisi urutan genap adalah 3! x 2! = 12 cara.

(d) Jika huruf-huruf vokal tidak pernah terletak berdampingan, maka banyaknya kata yang dapat dibentuk ada 5! = 120 cara. Jika semua huruf vokal terletak berdampingan, (O-E-A)-M-G dapat disusun dalam 3! cara. Huruf-huruf (O-E-A) sendiri dapat disusun dalam 3! = 6 cara. Jika huruf-huruf vokal terletak berdekatan, maka banyaknya susunan ada 3! x 3! = 36 cara. Banyaknya cara menyusun huruf-huruf sedemikian sehingga semua huruf vokal tidak pernah berdekatan, ada sebanyak 120 – 36 = 84 cara.

2) Ada berapa cara 4 orang mahasiswa (w, x, y, z) menempati kursi yang disusun dalam suatu susunan yang teratur?

   Jawab. $P(4,4) = 4! = 24$ cara

3) Pergantian kepengurusan BEM akan membentuk panitia inti sebanyak 2 orang yaitu Ketua dan Wakil Ketua. Panitia terdiri atas 6 orang yaitu *a, b, c, d, e*, dan *f.* Berapa pasang calon yang dapat duduk sebagai panitia inti tersebut?

   Jawab. $P(6,2) = \dfrac{6!}{(6-2)!} = \dfrac{6!}{4!} = 6 \text{ x } 5 = 30$ cara

4) Sepuluh orang mahasiswa akan mengadakan rapat dan duduk mengelilingi sebuah meja. Ada berapa carakah 10 orang mahasiswa dapat diatur mengelilingi meja tersebut?

   Jawab.
   $P_5 = (10-1)! = 9! = 9.8.7.6.5.4.3.2.1 = 362880$ cara

5) Berapa banyak kata berbeda yang terbentuk dari kata "RADIO"?

   Jawab. $5! = 5.4.3.2.1 = 120$ kata

6) Peluang seorang lulusan suatu universitas diterima bekerja pada suatu perusahaan adalah 0,75. Jika lulusan tersebut mendaftar pada 24 perusahaan, berapa perusahaan yang mungkin menerima lulusan tersebut?

Jawab.

Frekuensi harapan kejadian A adalah $F_E(A) = n \times P(A)$

Diketahui $P(A)$ = 0,75 dan n = 24. Maka:

$F_E(A) = 24 \times 0,75$ = 18 perusahaan.

7) Terdapat tiga orang (X, Y dan Z) duduk bersama di sebuah bangku taman. Ada berapa urutan tempat duduk yang dapat dibentuk?

Jawab.

$$\left.\begin{array}{l} P(n,n) = n! \\ P(3,3) = 3! = 6 \end{array}\right\} \text{XYZ, XZY, YXZ, YZX, ZXY, ZYX}$$

8) Suatu kelompok belajar yang beranggotakan empat orang (A, B, C dan D) akan memilih ketua dan wakil ketua kelompok. Ada berapa alternatif susunan ketua dan wakil ketua dapat dipilih?

Jawab.

$$P(n,x) = \frac{n!}{(n-x)!} = \frac{4!}{(4-2)!} = 12 \text{ cara}$$

9) Berapa banyaknya permutasi dari cara duduk yang dapat terjadi jika disiapkan 4 kursi untuk 8 orang, sedangkan salah seorang di antaranya selalu duduk di kursi yang sama.

Jawab. Jika salah seorang selalu duduk di kursi yang sama maka tersisa 7 orang dengan 3 kursi kosong. Banyaknya cara duduk ada:

$$P(7,3) = \frac{7!}{(7-3)!} = 210 \text{ cara.}$$

10) Lima orang duduk mengitari suatu meja. Ada berapa cara kelima orang tersebut duduk dengan urutan yang berlainan?

Jawab.

Banyaknya cara duduk ada $(5-1)! = 4! = 24$ cara.

11) Tentukan banyaknya permutasi siklis dari 3 unsur yaitu A, B, C

Jawab.

Jika A sebagai urutan I : ABC

Jika B sebagai urutan I : BCA

Jika C sebagai urutan I : CAB

Jika banyak unsur ada 4, yaitu A, B, C, D maka banyaknya permutasi siklis dari 4 unsur adalah $\frac{4!}{4} = 6$

12) Ada berapa cara membuat 5 bendera yang tersusun atas 8 warna?

Jawab. Cara membuat 5 bendera yang tersusun atas 8 warna adalah

$$P(8,5) = \frac{8!}{(8-5)!} = 6720$$

Banyaknya permutasi dari *n* objek, yang terdiri atas tipe-tipe *p, q,* dan *r,* yang diambil sekaligus adalah $\frac{n!}{p!q!r!}$

Contoh 3.15. Ada berapa cara menyusun huruf-huruf PASCA-SARJANA?

Jawab. $\frac{12!}{2!2!2!2!2!}$

Banyaknya permutasi *n* objek yang diambil sebanyak *r* setiap pengambilan dimana setiap objek dapat berulang *r* kali, adalah n^r.

Bukti:

Banyaknya cara mengisi tempat pertama adalah *n.* Karena objek dapat berulang maka banyaknya cara mengisi tempat kedua juga sebanyak *n.* Banyaknya cara mengisi tempat ketiga, keempat, sampai dengan ke-*r* adalah *n.* Dengan demikian keseluruhan cara mengisi tempat pertama, sampai ke-*r* ada sebanyak n^r.

Contoh 3.16: Seorang anak memiliki 3 kantong dan 4 koin. Ada berapa cara menempatkan keempat koin ke dalam kantong?

Jawab. Koin pertama dapat dimasukkan ke dalam kantong dengan 3 cara (karena ada 3 kantong yang tersedia). Demikian juga, koin kedua, ketiga dan keempat, masing-masing dapat dimasukkan ke dalam kantong dengan 3 cara. Karena itu banyaknya cara memasukkan koin tersebut ke dalam kantong ada sebanyak $3 \text{ x } 3 \text{ x } 3 \text{ x } 3 = 3^4$ cara.

Kombinasi: Kombinasi adalah seleksi dari objek-objek, dimana urutan objek-objek tidak diperhitungkan.

C.1. Permutasi Himpunan

Misalkan *r* adalah suatu bilangan bulat positif maka *r-permutasi* dari himpunan *S* yang terdiri atas *n* elemen dapat dibentuk suatu susunan berurutan *r* dari *n* elemen himpunan tersebut. Andaikan $S = \{a, b, c\}$ maka tiga 1-permutasi dari *S* adalah

a b c,

enam 2-permutasi dari *S* adalah

ab ac ba bc ca cb,

dan enam 2-permutasi dari *S* adalah

abc acb bac bca cab cba.

Tidak ada 4-permutasi dalam kasus ini karena anggota himpunan *S* kurang dari 4.

Kita menuliskan $P(n, r)$ untuk menyatakan banyaknya *r*-permutasi dari suatu himpunan yang terdiri atas *n* elemen. Jika *r* > *n* maka $P(n, r)$ = 0. Jelas bahwa $P(n, 1) = n$ untuk setiap bilangan bulat positif *n*. Suatu *n*-permutasi dari himpunan *S* yang terdiri atas *n* elemen dinamakan permutasi *S* dari himpunan *S* atau permutasi *n* elemen. Jadi permutasi dari suatu himpunan *S* dapat dianggap sebagai susunan elemen-elemen himpunan *S* dengan urutan tertentu sebagaimana telah ditunjukkan bahwa $P(3,1) = 3, P(3, 2) = 6,$ dan $P(3, 3) = 6.$

Teorema 3.1. Untuk *n* dan *r* bilangan bulat positif dengan $r \leq n$,

$$P(n, r) = n \text{ x } (n-1) \text{ x} \cdots \text{x } (n-r+1).$$

Bukti. Untuk menyusun suatu *r*-permutasi dari himpunan yang memiliki *n* elemen, kita dapat memilih elemen pertama dengan *n* cara, elemen kedua dengan (*n* – 1) cara, untuk sebarang elemen yang dipilih sebagai elemen pertama), ... , dan memilih elemen ke-*r* dengan *n* – (*r* – 1) cara, untuk sebarang elemen yang dipilih dalam setiap elemen ke-(*r* – 1). Berdasarkan prinsip perkalian, ke-*r* elemen tersebut dapat dipilih dengan $n \text{ x } (n-1) \text{ x } (n-2) \text{ x} \cdots \text{x } (n-r+1)$ cara.

Untuk suatu bilangan bulat non-negatif *n, n*! (*n* faktorial) didefinisikan sebagai berikut:

$$n! = n \text{ x } (n-1) \text{ x} \cdots \text{x } 3 \text{ x } 2 \text{ x } 1,$$

dengan 0! = 1. Dengan demikian,

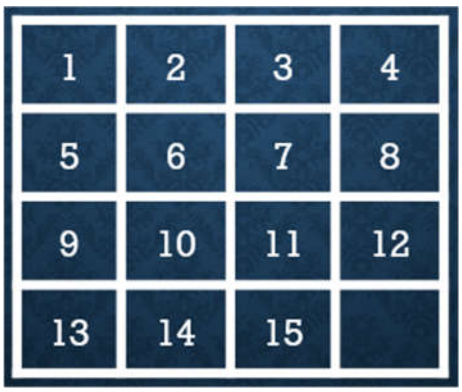
$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Untuk $n \geq 0,$ kita mendefinisikan $P(n,0) = 1$ dan ini memenuhi rumus di atas jika dipilih *r* = 0. Banyaknya permutasi *n* elemen adalah

$$P(n,n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Contoh 3.17. Banyaknya kata yang terdiri atas 4 huruf yang dapat dibentuk dari semua huruf *a, b, c, d, e* dengan setiap hurufnya hanya digunakan satu kali adalah $P(5,4) = 5!/(5-4)! = 120.$ Banyaknya kata yang dapat disusun atas ke-5 huruf tersebut adalah $P(5,5) = 5!/(5-5)!$ juga ada 120.

Contoh 3.18. Mainan "15 puzzle" yang terdiri atas 15 kotak persegi ditandai dengan angka 1 sampai dengan 15 pada masing-masing kotak. Ke-15 kotak dipasang pada bingkai persegi 4 x 4 seperti digambarkan di bawah ini.



Gambar 3.3. Puzzle 4x4

Tantangan permainan ini adalah bagaimana memindahkan setiap kotak dari posisi awal ke posisi tertentu agar terbentuk susunan gambar atau angka yang diinginkan. Berdasarkan jumlah kotak yang tersedia pada bingkainya, kita akan menempatkan 15 kotak kecil secara terurut di dalam bingkainya dengan satu kotak kosong. Ada berapa posisi yang mungkin dapat dibentuk di dalam bingkai tersebut? Masalah ini menunjukkan banyaknya cara menyusun bilangan-bilangan 1, 2, 3, . . ., 15 ke dalam 16 kotak persegi berukuran 4 x 4, dengan 1 kotak dibiarkan kosong. Karena kita dapat menempatkan kotak kosong dengan 16 cara, maka masalah ini menunjukkan banyaknya cara menempatkan angka 1, 2, 3, . . . , 16 ke dalam 16 kotak bingkainya, yaitu $\mathrm{P}(16,16)=16!$ cara.

Dengan contoh yang sama dapat ditentukan ada berapa cara menyusun angka 1, 2, 3, . . ., 15 ke dalam suatu bingkai berukuran 6 x 6, dengan 21 kotak kosong. Banyaknya cara menyusun 15 kotak ke dalam bingkai tersebut di atas dapat ditentukan sebagai permutasi 15 dari 36, yaitu $\mathrm{P}(36,15)=36!/(36-15)!=36!/21!$

Contoh 3.19. Ada berapa banyak cara menyusun 26 huruf abjad sedemikian sehingga tidak ada huruf vokal yang terletak berdampingan?

Jawab. Menyusun 26 huruf abjad sedemikian sehingga tidak ada huruf vokal yang terletak berdampingan menyusun 26 huruf abjad sedemikian sehingga tidak ada huruf vokal yang terletak berdampingan (juga masalah-masalah pencacahan lainnya) dapat langsung diketahui jika kita telah terbiasa dan dapat memastikan bagaimana menyelesaikannya. Ada dua tugas yang akan diselesaikan. Pertama, memutuskan bagaimana mengurutkan konsonan. Terdapat 21 konsonan, maka ada 21! cara menempatkan konsonan tersebut. Karena tidak ada huruf vokal yang berdampingan, maka harus terdapat 5 dari 22 posisi di depan, di tengah, dan di belakang huruf-huruf konsonan. Tugas kedua adalah menempatkan huruf-huruf vokal pada posisi-posisi tersebut. Ada 22 posisi untuk huruf *a*, 21 posisi untuk *i*, 20 untuk *u*, 19 untuk *e* dan 18 untuk *o*. Artinya tugas kedua ini dapat dilakukan dengan $\mathrm{P}(22,5)=\dfrac{22!}{17!}$ cara. Berdasarkan prinsip perkalian, dapat diketahui bahwa banyaknya susunan huruf-huruf abjad dengan huruf vokal yang tidak berdampingan, adalah $21! \text{ x } \dfrac{22!}{17!}$.

Contoh 3.20. Ada berapa bilangan 7-digit yang semua angkanya berbeda dari $\{1,2,3,\cdots,9\}$ sedemikian sehingga angka 5 dan 6 tidak muncul berurutan dalam setiap susunannya?

Jawab. Akan ditentukan permutasi 7 dari himpunan $\{1,2,3,\cdots,9\}$, dan mempartisi permutasi-7 ini menjadi 4 yaitu (i) angka 5 dan 6 tidak muncul sebagai suatu digit; (2) angka 5 muncul sebagai digit tetapi 6 tidak muncul sebagai digit; (3) angka 6 muncul sebagai suatu digit tetapi 6 tidak muncul sebagai digit; dan (4) angka 5 dan 6 muncul sebagai digit.

Permutasi pertama, permutasi-7 dari $\{1,2,3,4,7,8,9\}$ yaitu $P(7,7)=7!=5040$.

Permutasi kedua dihitung sebagai berikut: Angka 5 dapat muncul sebagai salah satu dari 7 angka-angka yang lain. Angka 6 yang tidak muncul, dapat dihitung sebagai permutasi-6 dari $\{1,2,3,4,7,8,9\}$. Dengan demikian ada $7P(7,6)=7(7!)=35.280$.

Permutasi ketiga, jika angka 6 muncul dan angka 5 tidak muncul, sama dengan permutasi kedua, ada 35.280 susunan.

Permutasi keempat, dihitung dengan mempartisi permutasi keempat ini menjadi tiga partisi:

a) Angka pertama adalah 5 sehingga angka kedua bukan angka 6.

$$\boxed{5}\boxed{\neq 6}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$$

Ada 5 posisi yang mungkin untuk angka 6. Angka 5 akan membentuk permutasi-5 dari 7 angka $\{1,2,3,4,7,8,9\}$. Karena itu ada $5 \text{ x } P(7,5)=\dfrac{5 \text{ x } 7!}{2!}=12.600$ bilangan dalam susunan.

b) Angka terakhir adalah 5, sehingga angka di sebelah kirinya bukan angka 6.

$$\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{\neq 6}\boxed{5}$$

Banyaknya susunan bilangan ini sama dengan susunan (a), yaitu 12.600.

c) Bilangan yang terletak di antara bilangan yang awal dan bilangan akhir adalah angka 5, sehingga bilangan di dekatnya bukan angka 6.

$$\square \boxed{\neq 6} \boxed{5} \boxed{\neq 6} \square \square \square$$

Posisi yang akan ditempati angka 5 adalah salah satu dari 5 posisi yang mungkin. Dengan demikian posisi untuk angka 6 hanya dapat dipilih dari 4 posisi lainnya. Posisi angka 5 membentuk permutasi-5 dari 7 angka $\{1,2,3,4,7,8,9\}$. Karena itu ada $5 \text{ x } 4 \text{ x } P(7,5) = 50.400$ susunan. Jadi untuk permutasi keempat ini, berdasarkan prinsip penjumlahan, ada 12.600 + 12.600 + 50.400 = 75.600 susunan bilangan. Selanjutnya berdasarkan prinsip penjumlahan, banyaknya susunan bilangan yang dicari adalah 5.040 + 35.280 + 35.280 + 75.600 susunan.

Penyelesaian yang didapatkan dalam contoh tersebut di atas diperoleh dengan cara mempartisi himpunan objek-objek menjadi bagian tertentu, membagi banyaknya objek yang dapat dihitung, kemudian menggunakan prinsip penjumlahan.

Prinsip penjumlahan dapat digunakan dengan cara lain yang lebih memudahkan untuk menentukan penyelesaian masalah tersebut di atas. Misalkan keseluruhan kumpulan *T* dari bilangan berdigit 7 yang dapat dibentuk dengan menggunakan bilangan bulat yang berbeda dari $\{1,2,3,\cdots,9\}$. Himpunan *T* terdiri atas $P(9,7) = \frac{9!}{2!} = 181.440$ susunan. Himpunan *T* dapat dipartisi menjadi dua himpunan bagian: *S* yang terdiri atas anggota himpunan *T* dimana angka 5 dan 6 tidak muncul berurutan, serta komplemen dari himpunan itu, yaitu S' yang terdiri atas anggota himpunan *T* dimana angka 5 dan 6 muncul berurutan. Akan ditentukan ukuran *S.* Berdasarkan prinsip penjumlahan, ukuran *T* sama dengan ukuran *S* ditambah ukuran S'. Jika kita dapat menentukan ukuran S' maka masalah akan terselesaikan. Ada berapa susunan di dalam S'? Telah disebutkan sebelumnya, bahwa di dalam himpunan bagian S' angka 5 dan 6 muncul berurutan. Ada 6 cara menempatkan angka 5 diikuti angka 6, dan ada 6 cara menempatkan angka 6 diikuti angka 5. Posisi yang lainnya akan membentuk permutasi-5 dari $\{1,2,3,4,7,8,9\}$. Jadi banyaknya susunan bilangan di S' adalah 2 x 6 x *P*(7,5) = 30.240. Himpunan bagian *S* terdiri atas 181.440 – 30.240 = 151.200 susunan.

Teorema 3.2. Banyaknya *r*-permutasi keliling dari suatu himpunan yang memiliki *n* elemen dinyatakan dengan

$$\frac{P(n,r)}{r} = \frac{n!}{r.(n-r)!} \tag{3.14}$$

Secara khusus, banyaknya permutasi keliling dari himpunan dengan *n* elemen adalah $(n-1)!$.

Bukti. Himpunan permutasi-*r* linier dapat dipartisi menjadi bagian-bagian dengan cara tertentu sehingga dua permutasi-*r* linier membentuk permutasi-*r* keliling yang sama, jika dan hanya jika permutasi-permutasi tersebut memiliki bagian-bagian yang sama. Banyaknya permutasi-*r* keliling sama dengan banyaknya bagian dari permutasi tersebut. Karena setiap bagiannya terdiri atas *r* permutasi-*r* linier, maka banyaknya bagian tersebut adalah

$$\frac{P(n,r)}{r}=\frac{n!}{r.(n-r)!}$$

Contoh 3.21: Sepuluh orang akan duduk mengelilingi satu meja bundar. Dua orang di antaranya tidak mau duduk berdekatan. Ada berapa susunan posisi duduk kesepuluh orang tersebut?

Jawab. Misalkan kesepuluh orang tersebut adalah $P_1, P_2, \cdots, P_{10}$. Dua orang di antaranya, misalkan P_1 dan P_2 tidak mau duduk berdekatan. Posisi duduk untuk sembilan orang dapat digambarkan sebagai berikut:

$$X, P_3, P_4, \cdots, P_{10}$$

dengan *X* menyatakan posisi duduk P_1 dan P_2 yang berdampingan, sehingga diketahui ada 8! Posisi duduk seperti itu. Jika kita menggantikan *X* menjadi P_1, P_2 atau P_2, P_1 maka akan diperoleh posisi duduk kesepuluh orang tersebut, dimana P_1 dan P_2 duduk berdekatan. Dengan demikian banyaknya posisi duduk kesepuluh orang tersebut dengan P_1 dan P_2 tidak berdekatan adalah 9! – 2 x 8! = 7 x 8!

Cara lain untuk menyelesaikan masalah tersebut di atas adalah sebagai berikut: Tetapkan tempat duduk P_1 pada posisi tertentu. Dengan demikian P_2 tidak dapat menempati kursi yang ada di sebelah kiri atau kanan P_1. Ada 8 tempat duduk yang mungkin bagi orang lain untuk duduk di sebelah kiri P_1, dan 7 posisi tempat duduk di sebelah kanannya. Kursi lainnya dapat diduduki dengan 7! cara. Karena itu posisi duduk kesepuluh orang dimana P_1 dan P_2 tidak berdekatan ada 8 x 7 x 7! = 7 x 8!

Contoh 3.22: Ada berapa banyak kalung dapat dibuat dari 20 butir manik-manik dengan urutan warna berbeda?

Jawab. Ada 20! permutasi dari 20 manik-manik tersebut. Karena setiap kalung dapat diputar tanpa mengubah susunan manik-maniknya maka banyaknya kalung yang dapat dibuat paling banyak ada 20!/20 = 19! Selanjutnya karena setiap kalung dapat dibalik tanpa mengubah susunan manik-maniknya, maka banyaknya kalung yang dapat dibuat ada sebanyak 19!/2.

C.2. Permutasi Multiset

Apabila *S* merupakan suatu multiset, maka permutasi-*r* dari *S* merupakan suatu susunan berurutan dari *r* objek di *S*. Jika total objek di dalam *S* ada sebanyak *n* (dengan perulangan dibolehkan), maka permutasi-*n* dari *S* juga merupakan permutasi dari *S*. Sebagai contoh, jika $\mathrm{S} = \{2.a, 1.b, 3.c\}$ maka

acbc   cbcc

merupakan permutasi-4 dari *S,* sedangkan

abccca

adalah permutasi dari *S*. Multiset *S* tidak memiliki permutasi-7 karena $7 > 2+1+3 = 6$, yaitu banyaknya objek di dalam *S*. Pada Teorema 3.3, akan ditentukan banyaknya permutasi-*r* dari suatu multiset *S*, yang masing-masing memiliki perulangan tak berhingga.

Teorema 3.3. Misalkan *S* adalah multiset yang memiliki *k* jenis objek berbeda, dan masing-masing objek jumlahnya tak hingga, maka banyak *r*-permutasi dari *S* ada k^{r}.

Bukti. Untuk menyusun suatu *r*-permutasi dari *S*, dapat dipilih objek pertama sebagai salah satu dari *k* jenis objek yang ada. Demikian juga, objek kedua dapat dipilih sebagai salah satu dari *k* jenis objek yang ada, dan seterusnya untuk, semua *k* jenis objek yang ada. Karena semua perulangan di dalam *S* adalah tak hingga, maka jumlah pilihan berbeda untuk sembarang objek selalu sama dengan *k* dan tidak bergantung pada objek yang dipilih sebelumnya. Berdasarkan prinsip perkalian, objek *r* dapat dipilih dalam k^{r} cara.

Contoh 3.23. Berapakah banyaknya bilangan basis 3 yang terdiri atas sebanyak-banyaknya 4 angka?

Jawab. Jawaban terhadap permasalahan ini adalah banyaknya permutasi-4 dari multiset $\{\infty.0, \infty.1, \infty.2\}$ atau dari multiset $\{4.0, 4.1, 4.2\}$. Menurut Teorema 3.3., banyaknya bilangan tersebut ada $3^4 = 81$.

Teorema 3.4. Misalkan *S* adalah multiset dengan *k* jenis objek dan jumlah objek berhingga untuk setiap jenisnya, masing-masing sebanyak $n_1, n_2, \cdots, n_k$. Andaikan banyaknya anggota himpunan *S* adalah $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$, maka banyaknya permutasi *S* sama dengan

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$

Bukti. Diketahui multiset *S* memiliki elemen yang masing-masing terdiri atas *k* jenis, misalnya $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k$ berturut-turut dengan perulangan $n_1, n_2, n_3, \cdots, n_k$, dan total objek $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$. Akan ditentukan banyaknya permutasi dari ke-*n* objek tersebut. Masalah ini dapat dibayangkan sebagai berikut: ada *n* tempat dan kita akan menempatkan dengan tepat satu objek dari *S* pada setiap tempat tersebut. Pertama akan kita tetapkan tempat mana yang akan ditempati oleh semua a_1. Karena a_1 ada sebanyak n_1 di *S*, maka kita harus memilih salah satu subset n_1 tempat dari himpunan yang terdiri dari n tempat. Hal ini dapat dilakukan dalam $\binom{n}{n_1}$ cara. Selanjutnya ditetapkan tempat yang akan ditempati oleh semua a_2. Tempat yang tersisa (setelah objek a_1 ditempatkan) ada sebanyak $n - n_1$ dan harus dipilih sebanyak n_2. Hal ini dapat dilakukan dalam $\binom{n-n_1}{n_2}$ cara. Demikian seterusnya, sehingga diketahui bahwa ada $\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$ cara untuk memilih tempat yang akan ditempati oleh semua objek a_3. Dengan cara yang sama, dan dengan menerapkan prinsip perkalian, dapat ditentukan bahwa banyaknya permutasi *S* adalah:

$$\frac{n!}{n_1!\cancel{(n-n_1)!}}\frac{\cancel{(n-n_1)!}}{n_2!\cancel{(n-n_1-n_2)!}}\frac{\cancel{(n-n_1-n_2)!}}{n_3!\cancel{(n-n_1-n_2-n_3)!}}\cdots$$

$$\cdots\frac{\cancel{(n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1})!}}{n_k!\cancel{(n-n_1-n_2-\cdots-n_k)!}},$$

Setelah disederhanakan, akan diperoleh

$$\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\cdots n_k!0!}=\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\cdots n_k!}$$

Contoh 3.24. Banyaknya permutasi dari semua huruf dalam kata MISSISSIPPI ada $\frac{11!}{1!4!4!2!}$, yaitu banyaknya permutasi dari multiset $\{1M, 4I, 4S, 2P\}$.

Jika multiset *S* hanya terdiri atas dua jenis objek, a_1 dan a_2, masing-masing dengan perulangan n_1 dan n_2 dimana $n=n_1+n_2$, maka menurut Teorema 3.4, banyaknya permutasi *S* adalah

$$\frac{n!}{n_1!n_2!}=\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}=\binom{n}{n_1}.$$

Karena itu kita dapat memandang $\binom{n}{n_1}$ sebagai kombinasi-n_1 dari himpunan yang terdiri atas *n* elemen atau sebagai permutasi dari suatu multiset yang terdiri atas dua objek, masing-masing dengan perulangan sebanyak n_1 dan $(n-n_1)$.

Ada interpretasi lain untuk $\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$ yang disebutkan di Teorema 3.4. Interpretasi ini menggunakan partisi himpunan menjadi bagian-bagian dengan ukuran yang telah ditentukan, dimana bagian-bagian tersebut ditandai dengan label tertentu. Masalah ini dapat dijelaskan melalui contoh berikut ini.

Contoh 3.25. Misalkan suatu himpunan memiliki 4 anggota $\{a,b,c,d\}$ yang akan dipartisi menjadi dua himpunan, masing-masing berukuran (memiliki anggota) 2. Jika masing-masing bagian tidak diberi label, maka ada 3 partisi yang berbeda yang dapat dibuat, yaitu:

$$\{a,b\},\{c,d\};\{a,c\},\{b,d\};\{a,d\},\{b,c\}.$$

Tetapi jika partisi tersebut di beri tanda, maka banyaknya partisi yang diperoleh akan lebih banyak. Misalkan masing-masing partisi dibeeri kode warna merah dan biru maka partisi tersebut di atas akan diperoleh 6 partisi. Partisi $\{a, b\}, \{c, d\}$ dengan kode merah dan putih, dapat dibentuk menjadi

$$\text{Kotak Merah } \{a, b\}, \text{ Kotak Biru } \{c, d\}$$

dan

$$\text{Kotak Biru } \{a, b\}, \text{ Kotak Merah } \{c, d\}$$

Secara umum, partisi $B_1, B_2, \cdots, B_k$ (bayangkan sebagai warna 1, warna 2, warna 3, ... , warna *k*), juga dibayangkan sebagai kotak.

Teorema 3.5. Misalkan *n* adalah suatu bilangan bulat positif dan $n_1, n_2, \cdots, n_k$ adalah bilangan-bilangan bulat positif dengan $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$. Banyaknya cara mempartisi suatu himpunan yang memiliki *n* anggota himpunan menjadi *k* kotak bertanda $B_1, B_2, \cdots, B_k$ dimana kotak 1 berisi n_1 objek, kotak 2 berisi n_2 objek, . . . , kotak *k* berisi n_k objek adalah

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!} \tag{3.15}$$

Jika kotak tadi tidak ditandai, maka banaknya partisi yang dapat disusun adalah

$$\frac{n!}{k!n_1!n_2!\cdots n_k!} \tag{3.16}$$

Bukti. Pembuktian Teorema 3.5 merupakan aplikasi langsung dari prinsip perkalian. Kita harus memilih objek mana yang harus dimasukkan ke kotak yang mana, tergantung pada ukurannya. Pertama kita memilih n_1 objek untuk kotak pertama, kemudian memilih n_2 objek dari $n - n_1$ objek yang tersisa untuk kotak kedua, selanjutnya memilih n_3 objek dari $n - n_1 - n_2$ objek yang tersisa untuk kotak ketiga, ... , dan akhirnya $n - n_1 - n_2 - \cdots - n_{k-1} = n_k$ objek untuk kotak ke-*k*. Menurut prinsip perkalian, banyaknya cara untuk memilih objek tersebut adalah

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1}}{n_k}$$

Sebagaimana pembuktian Teorema 3.4, hasilkali kombinasi tersebut menghasilkan

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

Selanjutnya misalkan kotak-kotak tersebut di atas tidak ditandai. Dengan demikian hasil di atas harus dibagi *k*! karena untuk setiap cara mendistribusikan objek-objek ke dalam *k* kotak yang tidak bertanda, ada *k*! cara memasang tanda 1, 2, 3, . . . , *k*. Berdasarkan prinsip pembagian, diketahui bahwa banyaknya partisi untuk kotak yang tidak bertanda, adalah

$$\frac{n!}{k!n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

D. Kombinasi

Banyaknya kombinasi dari *n* objek berbeda yang diambil sebanyak *r* setiap kali pengambilan adalah

$$^{n}C_r = C(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!r!} \tag{3.17}$$

Bukti. Masing-masing kombinasi terdiri atas *r* objek berbeda, dan dapat disusun dalam *r*! Cara.

- Untuk satu kombinasi *r* objek berbeda, banyaknya susunan ada *r*!
- Untuk $C(n,r)$ kombinasi, banyaknya susunan adalah $r!C(n,r)$
- Total banyaknya kombinasi yang dapat disusun ada

$$r!C(n,r)\cdots\cdots\cdots(*)$$

Tetapi banyaknya permutasi dari *n* objek berbeda yang diambil sebanyak *r* setiap kali pengambilan adalah

$$P(n,r)\cdots\cdots\cdots(**)$$

Persamaan $(*)$ dan $(**)$ memiliki nilai yang sama, oleh karena itu

$$P(n,r) = r!C(n,r)$$

$$\Rightarrow \frac{n!}{(n-r)!} = r!C(n,r)$$

$$\text{dimana } C(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Bukti:

$$C(n,r) \qquad = C(n,n-r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$C(n,n-r) \quad = \frac{n!}{(n-r)!(n(n-r))!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Misalkan himpunan S mempunyai | S | = n elemen. Banyaknya himpunan bagian S yang terdiri dari k $(k \leq n)$ disebut kombinasi n objek yang diambil sebanyak k objek sekaligus. Simbolnya adalah $\binom{n}{k}$ atau $C(n,k)$ atau ${}_nC_k$. Banyaknya kombinasi yang dimaksud dapat dinyatakan dalam persamaan $C(n,\ k) \ = \ {}_nC_k = \dfrac{n\ !}{(n\text{ - }k)!\ k!}$

Dalam himpunan bagian yang dipilih, urutan kemunculan anggotanya tidaklah diperhatikan. Yang diperhatikan adalah objek-objek yang muncul.

Contoh 3.26. Seorang pelatih bola basket akan memilih komposisi pemain yang akan diturunkan dalam suatu pertandingan. Ada 12 orang pemain yang dapat dipilih. Berapa macam tim yang dapat dibentuk ?

Jawab. Dalam memilih pemain yang akan diturunkan, urutan pemilihan tidak diperhatikan. Jadi, yang menjadi masalah hanyalah siapa yang dipilih. Tidak menjadi masalah apakah seorang pemain terpilih pertama ataupun terakhir. Jadi banyaknya tim yang dapat dibentuk oleh pelatih tersebut adalah kombinasi 12 objek yang diambil 5 sekaligus adalah sebagai berikut:

$$\binom{12}{5} = \frac{12\ !}{7\ !\ 5\ !} = 792 \text{ tim.}$$

Contoh 3.27. Ada berapa cara mengelompokkan 3 orang dari 4 orang?

Jawab.

$$C(4,3) = \binom{4}{3} = \frac{4!}{(4-3)!3!} = \frac{4}{(4-3)!} = \frac{4}{1} = 4 \text{ cara}$$

Contoh 3.28. Suatu warna tertentu dibentuk dari campuran 3 warna yang berbeda. Jika terdapat 4 warna, yaitu Merah, Kuning, Biru dan Hijau, ada berapa kombinasi tiga jenis warna yang dapat dihasilkan?

Jawab.

$$C(n,x)=\frac{n!}{(n-x)!x!}\Rightarrow C(4,3)=\frac{4!}{(4-3)!3!}=4$$

kombinasi warna (MKB, MKH, KBH, MBH).

Contoh 3.29. Berapa banyaknya jabat tangan yang dapat dilakukan oleh 10 orang?

Jawab.

$$C(10,2)=\frac{10!}{(10-2)!2!}=45$$

jabat tangan.

Contoh 3.30. Suatu kelompok yang terdiri dari 3 orang pria dan 2 orang wanita akan memilih 3 orang pengurus. Berapa cara yang dapat dibentuk dari pemilihan jika pengurus terdiri dari 2 orang pria dan 1 orang wanita.

Jawab.

$$C(3,2)C(2,1)=\left[\frac{3!}{(3-2)!2!}\right]\left[\frac{2!}{(2-1)!1!}\right]=6 \text{ cara}$$

L1 L2 W1 ; L1 L2 W2 ;

L1 L3 W1 ; L1 L3 W2 ;

L2 L3 W1 ; L2 L3 W2 .

Contoh 3.31. Dalam sebuah ujian, seorang mahasiswa diwajibkan mengerjakan 5 soal dari 8 soal yang tersedia. Tentukan:

a. banyaknya jenis pilihan soal yg mungkin untuk dikerjakan
b. banyaknya jenis pilihan soal yg mungkin dikerjakan jika no.6 dan 7 wajib dikerjakan.

Jawab.

a. $C(8,5)=56$ cara
b. $C(6,3)=20$ cara

Contoh 3.32. Banyaknya cara memilih 4 pengurus dari 6 calon adalah....

Jawab. $C(6,4)=15$ cara

Contoh 3.33. Dalam sebuah kotak terdapat 7 kelereng. Berapa banyak cara mengambil 4 kelereng dari kantong tersebut?

Jawab. $C(7,4)=35$ cara

Contoh 3.34. Sekelompok mahasiswa akan mengerjakan 9 dari 10 soal ulangan, tetapi soal 1-5 harus dikerjakan. Banyaknya pilihan yang dapat diambil mahasiswa adalah.

Jawab. $C(5,4)=5$ cara

Contoh 3.35. Seorang peternak akan membeli 3 ekor ayam dan 2 ekor kambing dari seorang pedagang yang memiliki 6 ekor ayam dan 4 ekor kambing. Dengan berapa cara peternak tersebut dapat memilih ternak-ternak yang diinginkannya?

Jawab.

Banyak cara memilih ayam = $C(6,3)=20$ cara

Banyak cara memilih kambing = $C(4,2)=6$ cara

Jadi, peternak tersebut memiliki pilihan sebanyak = 20×6 = 120 cara

Contoh 3.36. Sebuah perusahaan membutuhkan karyawan yang terdiri dari 5 putra dan 3 putri 15 orang pelamar 9 di antaranya putra. Tentukan banyaknya cara menyeleksi karyawan!

Jawab. Pelamar putra ada 9 dan pelamar putri 6. Banyak cara menyeleksi adalah:

$C(9,5)C(6,3)=2360$

Contoh 3.37. Dalam mengadakan suatu pemilihan dengan menggunakan obyek 4 orang pedagang kaki lima untuk diwawancarai, maka untuk memilih 3 orang untuk satu kelompok. Ada berapa cara kita dapat menyusunnya?

Jawab.

4C3 =4! / 3! (4-3)!

= (4.3.2.1) / 3.2.1.1

= 24 / 6 = 4 cara

Contoh 3.38. Suatu warna tertentu dibentuk dari campuran 3 warna yang berbeda. Jika terdapat 4 warna, yaitu Merah, Kuning, Biru dan Hijau, maka berapa kombinasi tiga jenis warna yang dihasilkan.

Jawab.

nCx = (n!)/(x!(n-x)!)

4C3 = (4!)/(3!(4-3)!)

= 24/6 = 4 macam kombinasi (MKB, MKH, KBH, MBH).

Contoh 3.39. Dalam suatu pertemuan terdapat 10 orang yang belum saling kenal. Agar mereka saling kenal maka mereka saling berjabat tangan. Berapa banyaknya jabat tangan yang terjadi.

Jawab. 10C2 = (10!)/(2!(10-2)!) = 45 jabat tangan

Contoh 3.40. Suatu kelompok yang terdiri dari 3 orang pria dan 2 orang wanita akan memilih 3 orang pengurus. Berapa cara yang dapat dibentuk dari pemilihan jika pengurus terdiri dari 2 orang pria dan 1 orang wanita.

Jawab.

3C2 . 2C1 = (3!)/(2!(3-2)!) . (2!)/(1!(2-1)!) = 6 cara, yaitu : L1 L2 W1 ; L1 L3 W1 ; L2 L3 W1 ; L1 L2 W2 ; L1 L3 W2 ; L2 L3 W2

Contoh 3.41. Dalam sebuah ujian, seorang mahasiswa diwajibkan mengerjakan 5 soal dari 8 soal yg tersedia. Tentukan:

a. banyaknya jenis pilihan soal yg mungkin untuk dikerjakan
b. banyaknya jenis pilihan soal yg mungkin dikerjakan jika no.6 dan 7 wajib dikerjakan.

Jawab.

a. 8 C5 = 8!/5!(8-5)! = (8×7×6×5!)/5!3! = 56 cara

b. 6C3 = 6!/3!(6-2)! = (6×5×4×3!)/3!3! = 20 cara

Contoh 3.42. Banyak cara memilih 4 pengurus dari 6 calon adalah....

Jawab. 6C4 = 6!/4!(6-4)! = (6×5×4!)/4!2! = 15 cara

Contoh 3.43. Dalam sebuah kantong terdapat 7 kelereng. Berapa banyak cara mengambil 4 kelereng dari kantong tersebut?

Jawab. 7C4 = 7!/4!(7-4)! = (7×6×5×4!)/4!3! = 35 cara

Contoh 3.44: Siswa diminta mengerjakan 9 dari 10 soal ulangan, tetapi soal 1-5 harus di kerjakan. Banyaknya pilihan yang dapat diambil siswa adalah.

Jawab. 5C4 = 5!/4!(5-4)! = (5×4!)/4!1! = 5 cara

Contoh 3.45. Seorang peternak akan membeli 3 ekor ayam dan 2 ekor kambing dari seorang pedagang yang memiliki 6 ekor ayam dan 4 ekor kambing. Dengan berapa cara peternak tersebut dapat memilih ternak-ternak yang di inginkannya?

Jawab.
Banyak cara memilih ayam = 6C3 = 6!/3!(6-3)! = 6!/3!3! = 20 cara
Banyak cara memilih kambing = 4C2 = 4!/2!(4-2)! = (4×3×2!)/2!2! = 6 cara
Jadi, peternak tersebut memiliki pilihan sebanyak = 20×6 = 120 cara

Contoh 3.46. Sebuah perusahaan membutuhkan karyawan yg terdiri dari 5 putra dan 3 putri. Jika terdapat 15 pelamar, 9 diantaranya putra. Tentukan banyaknya cara menyeleksi karyawan!

Jawab.

Pelamar putra = 9 dan pelamar putri 6 banyak cara menyeleksi:

9C5 x 6C3 = 9!/5!x(9-5)! x 6!/3!x(6-3)! = 2360

E. Kombinasi Berhingga

(a) Banyaknya kombinasi dari *n* objek berbeda yang diambil sebanyak *r* setiap kali pengambilan jika terdapat *p* objek yang selalu diambil = $C(n-p, r-p)$.

(b) Banyaknya kombinasi dari *n* objek berbeda yang diambil sebanyak *r* setiap kali pengambilan jika terdapat *p* objek yang akan selalu diambil = $C(n-p, r)$.

Contoh 3.47.

(a) Ada berapa cara 11 orang pemain kriket dapat dipilih dari 15 orang pemain?

(b) Ada berapa cara 11 orang pemain kriket dapat dipilih dari 15 orang pemain jika salah seorang pemain selalu terpilih?

(c) Ada berapa cara 11 orang pemain kriket dapat dipilih dari 15 orang pemain joka seorang pemain tertentu tidak pernah terpilih?.

Jawab.

(a) Jika ada 11 pemain yang akan dipilih dari 15 orang pemain maka banyaknya cara memilih pemain adalah

$$C(15,11) = \binom{15}{11} = \frac{15!}{4!11!} = \frac{15.7.13.}{4.3.2.1} = 15.7.13 = 1365$$

(b) Jika salah seorang pemain selalu terpilih, berarti ada 10 orang pemain lainnya yang harus dipilih dari 14 orang pemain. Banyaknya cara memilih pemain dengan cara seperti itu adalah

$$C(14,10) = \binom{14}{10} = \frac{14!}{4!10!} = \frac{\cancel{14}.13.\cancel{12}.11}{\cancel{4}.3.\cancel{2}.1} = 7.13.11 = 1001$$

(c) Jika salah seorang pemain tidak pernah terpilih, berarti ada 11 orang pemain lainnya yang harus dipilih dari 14 orang pemain. Banyaknya cara memilih pemain dengan cara seperti itu adalah

$$C(14,11) = \binom{14}{11} = \frac{14!}{3!11!} = \frac{14.13.12}{3!} = 14.13.2 = 364$$

Banyaknya cara memilih nol atau lebih objek dari *n* objek berbeda adalah $2^n - 1$.

Bukti.

Banyak cara memilih salah satu objek dari *n* objek berbeda adalah $C(n,1)$.

Banyak cara memilih dua objek dari *n* objek berbeda adalah $C(n,2)$.

Banyak cara memilih tiga objek dari *n* objek berbeda adalah $C(n,3)$.

Banyak cara memilih *n* objek dari *n* objek berbeda adalah $C(n,n)$.

Jadi, total banyaknya cara memilih salah satu atau lebih objek dari *n* objek berbeda adalah:

$$\begin{aligned}
&C(n,1)+C(n,2)+C(n,3)+\cdots+C(n,n)\\
&=\left[C(n,0)+C(n,2)+C(n,3)+\cdots+C(n,n)\right]-C(n,0)\\
&=2^n-1
\end{aligned}$$

Contoh 3.48. John memiliki 8 orang teman. Ada berapa cara john mengajak salah satu atau lebih teman-temannya ke bioskop?

Jawab. John dapat mengjak satu atau lebih teman-temannya ke bisokop. Banyaknya cara ada $2^8 - 1 = 255$ cara.

Banyaknya cara memilih nol atau lebih objek dari *n* objek yang identik adalah $n+1$ cara.

Contoh 3.49. Ada berapa cara memilih nol atau lebih huruf-huruf dari AAAAA?

Jawab.

Banyaknya cara memilih nol A = 1 cara

Banyaknya cara memilih satu A = 1 cara

Banyaknya cara memilih dua A = 1 cara

Banyaknya cara memilih tiga A = 1 cara

Banyaknya cara memilih empat A = 1 cara

Banyaknya cara memilih lima A = 1 cara

Jumlah banyaknya cara memilih nol atau lebih huruf A dari AAAAA ada sebanyak 6 cara (5 + 1) cara.

Banyaknya cara memilih satu atau lebih objek dari *n* objek, yang terdiri atas 3 kelompok objek identik yaitu *p* objek identik, *q* objek identik, dan *r* objek identik lainnya adalah $(p+1)(q+1)(r+1)2^n - 1$ cara.

Contoh 3.50. Tentukan banyaknya cara memilih sekurang-kurangnya satu buah dari keranjang yang berisi 3 buah apel, 4 buah mangga dan 5 buah pisang.

Jawab.

Banyaknya cara memilih buah apel = (3+1) = 4 cara.

Banyaknya cara memilih buah mangga = (4+1) = 5 cara.

Banyaknya cara memilih buah pisang = (5+1) = 6 cara.

Total banyaknya cara memilih buah = 4 x 5 x 6 = 120 cara. Tetapi banyaknya cara ini masih mencakup satu cara untuk tidak memilih salah satu buah, sehingga banyaknya cara memilih sekurang-kurangnya satu buah adalah 120-1 = 119 cara. Buah yang dipilih terdiri atas buah yang sama jenisnya sehingga $n = 0$. Jadi $2^n = 2^0 = 1$. Banyaknya cara memilih *r* objek dari *n* objek identik adalah 1.

Contoh 3.51. Ada berapa cara memilih 5 bola dari 12 bola berwarna merah yang identik?

Jawab. Keduabelas bola merah adalah identik, sehingga banyaknya cara memilih 5 bola adalah 1 cara.

Contoh 3.52. Berapa cara membentuk 4 angka dari angka-angka 1, 2, 3, 4, dan 5?

Jawab. Diketahui *n* = 5 (yaitu banyaknya angka), dan *r* = 4 (yaitu banyaknya tempat yang akan diisi dengan 4 angka). Jadi banyaknya cara membentuk 4 angka dari angka-angka 1, 2, 3, 4, dan 5 ada sebanyak $P(5,4) = \frac{5!}{1!} = 5! = 5.4.3.2.1 = 120$ cara.

Contoh 3.53. Ada berapa banyak bilangan ganjil antara 1000 dan 9999 yang semua angkanya berbeda?

Jawab. Suatu bilangan antara 1000 dan 9999 merupakan suatu susunan *berurut* dari 4 angka. Masalah yang akan diselesaikan disini adalah himpunan bagian dari suatu permutasi. Ada 4 kemungkinan untuk setiap angka yang akan diambil, yaitu satuan, puluhan, ratusan, dan ribuan. Bilangan yang akan dicari hanya bilangan ganjil berarti satuan untuk bilangan tersebut adalah 1, 3, 5, 7, 9. Dengan demikian, ada 5 pilihan untuk bilangan satuannya. Puluhan dan satuan terdiri atas bilangan-bilangan 0, 1, 2, …, 9, sedangkan ribuannya terdiri atas bilangan-bilangan 1, 2, …, 9. Karena angka yang dicara harus berbeda, maka ada 8 pilihan angka ribuan, untuk semua angka satuan. Selanjutnya ada 8 pilihan untuk angka ratusan, 7 pilihan untuk angka puluhan. Berdasarkan aturan perkalian, banyaknya bilangan ganjil antara 1000 dan 9999 yang semua angkanya berbeda ada sebanyak 5 x 8 x 8 x 7 = 2240 angka.

Contoh 3.54. Ada berapa banyak bilangan bulat antara 0 dan 10000 yang memiliki tepat satu angka 5?

Jawab. Cara I. Misalkan *S* adalah himpuna bilangan bulat antara 0 dan 10000 yang memiliki tepat satu angka 5. Satu angka yang sama dengan 5. Himpunan *S* dapat dipartisi atas himpunan S_1 yang terdiri atas bilangan satu angka di S, himpunan S_2 yang terdiri atas bilangan dua angka di S, himpunan S_3 yang terdiri atas bilangan tiga angka di S, dan himpunan S_3 yang terdiri atas bilangan empat angka di S. Tidak ada bilangan lima angka di S. Jelas bahwa

$$|S_1| = 1$$

Bilangan di S_2 terdiri atas dua bentuk: (i) angka satuan yaitu angka 5, dan (ii) angka puluhan yaitu angka 5. Angka satuan terdiri atas 8 angka (angka puluhan bukan angka 0 maupun 5). Angka puluhan terdiri atas 9 kemungkinan (yaitu 0 sampai 9, kecuali 5). Karena itu

$$|S_2| = 8 + 9 = 17$$

Dengan penjelasan yang sama, diperoleh

$$|S_3| = 8\text{x}9 + 8\text{x}9 + 9\text{x}9 = 225$$

dan

$$|S_4| = 8\text{x}9\text{x}9 + 8\text{x}9\text{x}9 + 8\text{x}9\text{x}9 + 9\text{x}9\text{x}9 = 2.673$$

Jadi

$$|S| = 1 + 17 + 225 + 2.673 = 2.916$$

Cara II. Dengan menyertakan angka-angka 0 di depan setiap bilangan (6 = 0006, 25 = 0025, 354 = 0354) maka dapat dipandang bahwa setiap bilangan di *S* terdiri atas bilangan 4 angka. Selanjutnya dengan mempartisi *S* menjadi S_1', S_2', S_3', S_4' tergantung bilangan 5 terletak pada posisi pertama, kedua, ketiga, atau keempat. Keempat himpunan di dalam partisi memiliki 9 x 9 x 9 = 729 bilangan bulat, oleh karena itu banyaknya bilangan bulat di dalam *S* ada 4 x 729 = 2916.

Contoh 3.55. Ada berapa bilangan lima-angka yang dapat disusun dari angka-angka 1, 1, 1, 3, 8?

Jawab. Akan ditentukan banyaknya permutasi dari suatu multiset yang terdiri atas 3 objek yang identik, dan 2 objek lainnya yang berbeda. Untuk masalah ini, hanya ada dua cara yang dapat dipilih yaitu (1) posisi mana yang akan ditempati oleh angka 3 (5 posisi), dan setelah itu (2) posisi mana yang akan ditempati oleh 8 (4 posisi). Ketiga posisi yang tersisa akan ditempati oleh 1. Jadi berdasarkan aturan perkalian, banyaknya cara menyusun angka-angka 1, 1, 1, 3, 8 ada 5 x 4 = 20 cara. Andaikan angka-angka yang akan disusun adalah 1, 1, 1, 3, 3, maka banyaknya cara menyusun angka-angka tersebut ada 10.

E.1. Kombinasi Himpunan

Misalkan *r* adalah bilangan bulat non-negatif. R-kombinasi dari himpunan *S* yang memiliki *n* elemen dalam hal ini merupakan pemilihan tak-terurut dari *r* atas *n* objek di *S*. Dengan kata lain, r-kombinasi dari *S* merupakan suatu himpunan bagian dari *S* yang terdiri atas *r* dari *n* objek di *S* – yaitu himpunan bagian dari *S* yang memiliki *r* elemen. Jika $S = \{a, b, c, d\}$ maka

$$\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$$

merupakan empat kombinasi-3 dari *S*. Notasi $\binom{n}{r}$ atau C(n,r) untuk menyatakan r-kombinasi dari suatu himpunan yang terdiri atas *n* elemen. Tentu saja

$$\binom{n}{r} = 0 \text{ jika } r > n$$

dan juga

$$\binom{0}{r} = 0 \text{ jika } r > 0$$

Berikut ini adalah fakta yang telah dibuktikan kebenarannya untuk setiap bilangan bulat non-negatif *n*.

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{n} = 1.$$

Dalam kasus khusus, $\binom{0}{0} = 1$.

Rumus dasar kombinasi diberikan pada teorema berikut ini.

Teorema 3.6. Untuk $0 \leq r \leq n$,

$$P(n,r) = r!\binom{n}{r} \tag{3.18}$$

Karena itu

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \tag{3.19}$$

Bukti. Misalkan *S* adalah himpunan yang terdiri atas *n* elemen. Setiap permutasi-*r* dari *S* muncul tepat satu kali sebagai hasi, dari dua tugas berikut ini:

(i) Memilih *r elemen dari S*.

(ii) Menyusun ke-*r* elemen yang terpilih dalam urutan tertentu.

Banyaknya cara melakukan tugas pertama, berdasarkan definisi, adalah jumlah kombinasi $\binom{n}{r}$. Banyaknya cara melakukan tugas kedua adalah $P(r,r) = r!$. Menurut prinsip perkalian, Selanjutnya dengan menggunakan rumus $P(n,r) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ sehingga diperoleh $\binom{n}{r} = \dfrac{P(n,r)}{r!} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$.

Contoh 3.56. 25 titik dipilih pada suatu bidang datar sedemikian sehingga tidak terdapat tiga di antaranya yang terletak pada satu garis lurus yang sama. Ada berapa garis lurus yang dapat dibentuk? Ada berapa segitiga yang dapat dibentuk?

Jawab. Karena tidak terdapat tiga titik yang terletak pada satu garis lurus, maka setiap pasangan titik membentuk suatu garis lurus yang unik. Jadi banyaknya garis lurus yang terbentuk sama dengan kombinasi-2 dari himpunan yang terdiri atas 25 elemen, yaitu

$$\binom{25}{2} = \frac{25!}{2!23!} = 300.$$

Demikian pula, setiap tiga titik akan membentuk satu segitiga unik, yaitu

$$\binom{25}{3} = \frac{25!}{3!22!}.$$

Contoh 3.57. 15 orang mahasiswa mendaftar untuk mengikuti kuliah matematika, tetapi hanya 12 orang yang dapat hadir pada jadwal kuliah. Ada berapa cara memilih 12 orang mahasiswa untuk mengikuti kuliah tersebut? Misalkan terdapat 25 kursi di dalam ruang kelas, ada berapa cara ke 12 mahasiswa memilih tempat duduk?

Jawab. Banyaknya cara memilih 12 mahasiswa yang akan mengikuti mata kuliah tersebut adalah

$$\binom{15}{12} = \frac{15!}{12!3!}.$$

Jika terdapat 25 kursi di dalam ruang kelas, maka ke-12 mahasiswa dapat memilih tempat duduk dalam $\mathrm{P}(25,12) = 25!/13!$ cara. Dengan demikian ada

$$\binom{15}{12}\mathrm{P}(25,12) = \frac{15!25!}{12!3!13!}$$

kemungkinan posisi duduk dari mahasiswa yang hadir di dalam ruang kelas tersebut.

Contoh 3.58. Ada berapa cara menyusun kata yang terdiri atas 8 huruf, dengan menggunakan ke-26 abjad latin jika masing-masing kata mengandung 3, 4, atau 5 huruf vokal?

Jawab. Tidak ada ketentuan berapa kali suatu huruf boleh digunakan dalam setiap kata yang terbentuk. Jadi kita bebas menghitung banyaknya kata yang dapat dibentuk berdasarkan banyaknya huruf vokal yang terdapat di dalam masing-masing kata, kemudian menggunakan prinsip penjumlahan.

Pertama, untuk kata yang mengandung 3 huruf vokal. Posisi ke-3 huruf vokal di dalam masing-masing kata dapat disusun dalam $C(8,3)$ cara; ke-5 posisi lainnya akan ditempati huruf konsonan. Dengan demikian, posisi huruf vokal ada 5^3 dan posisi huruf konsonan ada 21^5. Jadi banyaknya kata yang dapat disusun ada

$$\binom{8}{3}5^3 21^5 = \frac{8!}{3!5!}5^3 21^5.$$

Dengan cara yang sama, banyaknya cara menyusun kata yang mengandung 4 huruf vokal ada

$$\binom{8}{4}5^4 21^4 = \frac{8!}{4!4!}5^4 21^4,$$

dan banyaknya kata yang mengandung 5 huruf vokal ada

$$\binom{8}{5}5^5 21^3 = \frac{8!}{5!3!}5^5 21^3.$$

Jumlah kata yang dapat dibentuk ada

$$\frac{8!}{3!5!}5^3 21^5 + \frac{8!}{4!4!}5^4 21^4 + \frac{8!}{5!3!}5^5 21^3$$

Corollary 3.1.

Untuk $0 \le r \le n$,

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}.$$

Bilangan $\binom{n}{r}$ memiliki banyak sifat yang penting dan menarik, tetapi pada bagian ini hanyak akan dijelaskan salah satu sifatnya saja.

Teorema 3.7.

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n,$$

dengan *n* menyatakan banyaknya kombinasi dari suatu himpunan yang memiliki *n* elemen.

Bukti. Akan ditunjukkan bahwa kedua ruas pada persamaan di atas menyatakan banyaknya kombinasi himpunan *S* yang memiliki *n* elemen dengan cara yang berlainan. Pertama, perhatikan bahwa setiap kombinasi dari *S* adalah r-kombinasi dari *S* untuk beberapa $r = 0, 1, 2, 3, ... , n$. Karena $\binom{n}{r}$ menyatakan banyaknya r-kombinasi dari S, maka berdasarkan prinsip penjumahan,

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}$$

adalah banyaknya kombinasi dari S.

Banyaknya kombinasi dari S dapat juga dihitung dengan membagi kemungkinan kombinasi menjadi n tugas: Misalkan elemen-elemen S terdiri atas $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$. Untuk memilih salah satu kominasi dari S maka ada dua pilihan yang mungkin dari masing-masing n elemen tersebut: x_1 termasuk dalam kombinasi atau tidak, x_2 termasuk dalam kombinasi atau tidak, . . . , x_n termasuk dalam kombinasi atau tidak. Dengn demikian berdasarkan prinsip perkalian, ada 2^n cara untuk membentuk kombinasi dari S tersebut. Dengan menyamakan kedua perhitungan di atas, maka teorema di atas akan terbukti.

E.2. Kombinasi Multiset

Jika S adalah suatu multiset, maka r-kombinasi dari S merupakan suatu seleksi tak berurut r dari objek-objek yang ada di S. Karena itu r-kombinasi dari S adalah multiset dari multiset itu sendiri, yaitu submultiset dari S. Apabila S terdiri atas n objek, maka hanya terdapat satu kombinasi-n dari S, yaitu S itu sendiri. Apabila S memiliki k jenis objek berbeda, maka terdapat k kombinasi-1 dari S.

Contoh 3.59. Jika diketahui $S = \{2a, 1b, 3c\}$, maka kombiasi-3 dari S adalah

$$\{2a, 1b\}, \{2a, 1c\}, \{1a, 1b, 1c\}, \{1a, 2c\}, \{1b, 2c\}, \{3c\}.$$

Teorema 3.8. Misalkan S adalah suatu multiset yang terdiri atas k jenis objek, dan masing-masing objek sebanyak tak hingga, maka banyaknya r-kombinasi dari S adalah

$$\binom{r+k-1}{r} = \binom{r+k-1}{k-1}.$$

Bukti. Misalkan ke-k jenis objek yang ada di S adalah $a_1, a_2, \cdots, a_k$ sedemikian sehingga

$$S = \{\infty.a_1, \infty.a_2, \cdots, \infty.a_k\}.$$

Sebarang kombonasi-r dari S akan berbentuk

$$\{x_1.a_1, x_2.a_2, \cdots, x_k.a_k,\}$$

dimana

$$x_1, x_2, \cdots, x_k$$

adalah bilangan-bilangan bulat non-negatif, dengan

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = r.$$

Sebaliknya, setiap barisan bilangan-bilangan bulat non-negatif

$$x_1, x_2, \cdots, x_k$$

dengan

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = r$$

berkorespondensi dengan suatu r-kombinasi dari *S*. Jadi, banyaknya r-kombinasi dari *S* sama dengan banyaknya penyelesaian untuk persamaan

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = r,$$

dimana $x_1, x_2, \cdots, x_k$ adalah bilangan-bilangan bulat non-negatif. Kita telah melihat bahwa banyaknya solusi ini sama dengan banyaknya permutasi dari multiset

$$T = \{r.\odot, (k-1).\otimes\}$$

yang terdiri atas dua jenis objek berlainan. Dari permutasi *T* yang diberikan, $k-1\otimes$ membagi $r\odot$ ke dalam *k* kelompok. Misalkan terdapat $x_1 \odot$ di sebelah kiri $\otimes$ pertama, terdapat $x_2 \odot$ yang terletak di antara $\otimes$ pertama dan $\otimes$ kedua, . . . , dan $x_k \odot$ di sebelah kanan dari $\otimes$ terakhir. Maka, $x_1, x_2, \cdots, x_k$ adalah bilangan-bilangan bulat non-negatif, dengan $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = r.$ Sebaliknya, dari bilangan-bilangan bulat non-negatif $x_1, x_2, \cdots, x_k$ dengan $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = r,$ kita dapat membalik urutan langkah-langkah di atas untuk menyusun suatu permutasi *T*. Jadi banyaknya r-kombinasi dari multiset *S* sama dengan banyaknya permutasi multiset *T* yang menurut Teorema 3.8 sama dengan

$$\frac{(r+k-1)!}{r!(k-1)!} = \binom{r+k-1}{r}.$$

Teorema 3.8 dapat pula dinyatakan sebagai berikut:

Banyaknya r-kombinasi dari k objek berbeda yang masing-masing tak hingga jumlahnya, sama dengan

$$\binom{r+k-1}{r}.$$

F. Teorema Binomial

Bilangan $C(n,r)$ menyatakan banyaknya kombinasi *r* dari suatu himpunan yang memiliki *n* anggota himpunan. Kombinasi memiliki banyak sifat yang menarik dan memenuhi beberapa identitas penting di dalam kobinatorika. Karena kombinasi digunakan di dalam teorema binomial maka $C(n,r)$ disebut *koefisien binomial*.

F.1. Formula Pascal

Koefisien binomial $C(n,r)$ berlaku untuk semua bilangan non-negatif *n* dan *r*. Nilai $C(n,r)=0$ jika $r>n$ dan $C(n,0)=1$ untuk semua *n*. Jika *n* positif dan $1\le r\le n$ maka:

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots 3.2.1} \qquad (3.20)$$

Telah ditunjukkan pada bagian sebelumnya bahwa $C(n,k)=C(n,n-k)$ untuk semua bilangan bulat *k* dan *n* dengan $0\le k\le n$.

F.2. Teorema Pascal

Untuk semua bilangan bulat *n* dan *k* dengan $1\le k\le n-1$,

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k+1}$$

Bukti. Salah satu cara membuktikan teorema ini adalah dengan mensubtitusi nilai-nilai koefisien binomial kemudian menunjukkan bahwa ruas kiri sama dengan ruas kanan. Mahasiswa dipersilakan membuktikan bahwa pernyataan tersebut benar.

Bukti lainnya dapat dilakukan dengan prinsip kombinatorika sebagai berikut: Misalkan *S* adalah suatu himpunan yang terdiri atas *n* elemen. Ambil sebarang anggota himpunan *S,* misalnya *x*. Selanjutnya *X* yang terdiri atas *k*-kombinasi dari *S,* dipartisi menjadi dua bagian, *A* dan *B*. Ke dalam partisi *A* kita memasukkan semua *k*-kombinasi, yang tidak memuat *x*. Pada partisi *B* kita memasukkan semua *k*-kombinasi yang memuat *x*. Ukuran *X* adalah $|X|=\binom{n}{k}$. Oleh karena itu, berdasarkan prinsip aturan penjumlahan, $C(n,k)=|A|+|B|$. Jadi, *k*-kombinasi di *A* adalah *k*-kombinasi dari himpunan $S-\{x\}$ yang terdiri atas *n* – 1 anggota. Dengan kata lain, ukuran *A* adalah

$$|A| = \binom{n-1}{k}.$$

Suatu *k*-kombinasi di *B* diperoleh dengan menggabungkan elemen *x* dengan kombinasi *k* -1 dari himpunan $S - \{x\}$. Jadi banyaknya anggota himpunan *B* adalah

$$|B| = \binom{n-1}{k-1}.$$

Dengan menggabungkan fakta-fakta tersebut, diperoleh

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Untuk menggambarkan bukti di atas, dimisalkan *n* = 5, *k* = 3, dan $S = \{x, a, b, c, d, e\}$ sehingga kombinasi 3 dari *S* di *A* adalah $\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\}$. Kombinasi ini merupakan kombinasi 3 dari himpunan $\{a,b,c,d\}$. Sedangkan kombinasi 3 dari *S* di *B* adalah $\{x,a,b\},\{x,a,c\},\{x,a,d\},\{x,b,c\},\{x,b,d\},\{x,c,d\}$. Jika elemen *x* dihapus dari kombinasi 3 ini maka diperoleh $\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\}$, yang merupakan kombinasi 2 dari himpunan $\{a,b,c,d\}$. Jadi $\binom{5}{3} = 10 = 4 + 6 = \binom{4}{3} + \binom{4}{2}$.

Dengan menggunakan relasi

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

dan informasi awal

$$\binom{n}{0} = 1 \text{ dan } \binom{n}{n} = 1, (n \geq 0),$$

koefisien binomial ditentukan tanpa harus menghitung dengan cara seperti (*).
Apabila koefisien binomial dihitung dengan cara tersebut, maka hasilnya sering ditampilkan dalam suatu susunan yang dinamakan segitiga Pascal. Susunan ini dituliskan oleh Blaise Pascal dalam buku yang berjudul *Traite du triangle arithmetique* pada tahun 1653 seperti dilukiskan pada Gambar 3.4.

Setiap elemen di dalam segitiga tersebut, kecuali elemen 1 pada kolom kiri dan diagonal, diperoleh dengan menjumlahkan dua elemen yang berada di atasnya, yaitu elemen yang tepat di atasnya dan di kirinya. Hal ini sesuai dengan Teorema Pascal. Sebagai contoh pada baris 8, dapat dilihat bahwa

$$\binom{8}{3} = 56 = 35 + 21 = \binom{7}{3} + \binom{7}{2}.$$

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Gambar 3.4. Segitiga Pascal

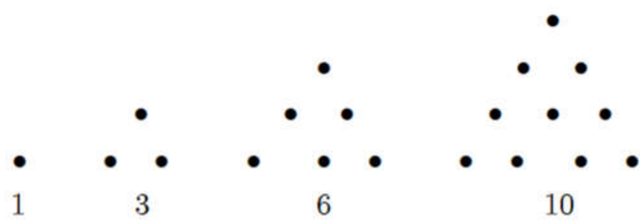
Ada banyak relasi yang melibatkan koefisien binomial dapat diselidiki dengan menggunakan segitiga Pascal. Relasi simetri

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

dengan mudah dapat dilihat dalam segitiga tersebut. Demikian juga identitas

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

dapat ditentukan dengan menjumlahkan bilangan-bilangan dalam suatu baris dalam segitiga Pascal. Bilangan $\binom{n}{1} = n$ pada kolom k = 1 merupakan bilangan cacah. Bilangan $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$ pada kolom k = 2 merupakan bilangan yang disebut *bilangan segitiga,* yang besarnya sama dengan banyaknya titik-titik dalam susunan segitiga pada Gambar 3.5.



Gambar 3.5. Bilangan segitiga

Bilangan $\binom{n}{3} = n(n-1)(n-2)/3!$ pada kolom k = 3 disebut bilangan tetrahedral, yang jumlahnya sama dengan banyaknya titik-titik dalam susunan tetrahedral.

F.3. Koefisien Binomial

Misalkan n adalah suatu bilangan bulat positif, maka untuk semua x dan y, berlaku

$$(x+y)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}x^1y^{n-1} + y^n \tag{3.21}$$

Dalam notasi sigma,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k \tag{3.22}$$

Bukti (dengan induksi matematika)

Untuk n = 1,

$$(x+y)^1 = \sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}x^{1-k}y^k = \binom{1}{0}x^1y^0 + \binom{1}{1}x^0y^1 = x+y,$$

adalah pernyataan yang benar.

Selanjutnya diasumsikan bahwa pernyataan itu juga benar untuk suatu bilangan bulat positif n dan dapat digunakan untuk membuktikan bahwa pernyataan yang sama juga berlaku jika n diganti dengan n + 1. Jadi dapat dituliskan bahwa

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n,$$

yang menurut hipotesis induksi,

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} &= (x+y)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k\right)\\ &= x\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k\right) + y\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n+1-k}y^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1}\\ &= \binom{n}{0}x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{n+1-k}y^k + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1} + \binom{n}{n}y^{n+1}.\end{aligned}$$

Dengan menggantikan k menjadi k – 1 di dalam jumlahan terakhir, maka diperoleh

$$\sum_{k=1}^{k}\binom{n}{k-1}x^{n+1-k}y^k.$$

Dengan demikian

$$(x+y)^{n+1} = x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] x^{n+1-k} y^k + y^{n+1},$$

dapat diubah menjadi

$$(x+y)^{n+1} = x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k + y^{n+1},$$

dengan menggunakan segitiga Pascal.

Selanjutnya karena

$$\binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1,$$

maka persamaan terakhir di atas dapat dituliskan menjadi

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k \tag{3.23}$$

Pernyataan ini adalah Teorema Binomial dimana *n* diganti menjadi *n* + 1 yang menunjukkan bahwa teorema tersebut berlaku untuk semua *n* bilangan bulat positif.

Teorema binomial dapat dituliskan dalam beberapa bentuk yang ekivalen sebagai berikut:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k} x^{n-k} y^k$$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k} x^k y^{n-k}$$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Bentuk yang pertama diturunkan dari teorema Binomial dan fakta bahwa

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, (k = 0, 1, 2, \cdots, n).$$

Kedua persamaan berikutnya masih menggunakan teorema yang sama tetapi dengan mengubah *x* menjadi *y.* Kasus *y* = 1 cukup sering terjadi.

Teorema 3.9. Misalkan *n* adalah suatu bilangan bulat positif, maka untuk semua *x*,

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k} x^k \tag{3.24}$$

Kasus khusus dimana $n = 2, 3, 4$ dari teorema binomial adalah

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$(x+y)^3 = 3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

F.4. Identitas

Ada beberapa sifat identitas yang dipenuhi oleh koefisien binomial. Sebagai contoh, identitas

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1} \tag{3.25}$$

dengan *n* dan *k* adalah bilangan-bilangan bulat.

diturunkan langnsung dari fakta bahwa $\binom{n}{k} = 0$ jika $k > n$ dan

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1} \text{ untuk } 1 \le k \le n.$$

Identitas

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n, \quad (n \ge 0) \tag{3.26}$$

telah dibuktikan dalam Teorema 3.4, yang juga diturunkan dari teorema binomial dengan memilih $x = y = 1$. Jika $x = 1, y = -1$ di dalam teorema binomial, maka diperoleh

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0, \quad (n \ge 1) \tag{3.27}$$

Bentuk ini juga dapat dituliskan

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots \quad (n \ge 1) \tag{3.28}$$

Identitas ini dapat diinterpretasi sebagai berikut: Jika *S* adalah suatu himpunan yang terdiri atas *n* elemen, maka banyaknya kombinasi dari *S* yang jumlah anggotanya genap adalah sama dengan banyaknya kombinasi *S* yang jumlah anggotanya ganjil. Pada persamaan (3.19) kedua ruas memiliki nilai 2^{n-1} yaitu

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots = 2^{n-1} \tag{3.29}$$

dan

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\cdots=2^{n-1} \tag{3.30}$$

Identitas ini dapat dibuktikan dengan prinsip kombinatorial sebagai berikut:

Misalkan $S=\{x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n\}$ adalah himpunan yang memiliki *n* elemen. Kita dapat membayangkan kombinasi *S* sebagai hasil dari proses di bawah ini:

(1) Kita memilih x_1 dan elemen yang lain juga dipilih atau tidak dipilih (2 pilihan)

(2) Kita memilih x_2 dan elemen yang lain juga dipilih atau tidak dipilih (2 pilihan)

$\vdots$

(*n*) kita memilih x_n dan elemen yang lain juga dipilih atau tidak dipilih (2 pilihan)

Dengan demikian ada *n* kemungkinan yang dapat dipilih dan masing-masing memiliki 2 kemungkinan. Jadi ada 2^n kombinasi yang dapat diperoleh berdasarkan (3.17). Sekarang, andaikan bahwa kita akan memilih suatu kombinasi yang terdiri atas elemen berjumlah genap. Dengan demikian ada dua pilihan untuk masing-masing $x_1,\cdots,x_{n-1}$. Tetapi ketika kita sampai pada x_n, hanya ada satu pilihan yang mungkin. Karena itu, jika kita memilih suatu bilangan genap dari elemen-elemen $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$, maka x_n harus dikeluarkan; sebaliknya jika memilih bilangan ganjil dari $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$, maka x_n harus dimasukkan. Jadi banyaknya kombinasi dari *S* yang memiliki elemen berjumlah genap adalah 2^{n-1}. Karena ruas kiri persamaan (3.20) juga menyatakan banyaknya kombinasi *S* yang memiliki elemen berjumlah genap maka persamaan (3.20) dapat berlaku. Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa persamaan (3.21) berlaku. Persamaan (3.21) dapat berlaku karena sebelumnya telah diketahui bahwa persamaan (3.21) dan (3.20) berlaku.

Dengan menggunakan identitas (3.20) dan (3.21), kita dapat menurunkan identitas sebagai berikut:

$$1\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+\cdots+n\binom{n}{n}=n2^{n-1},(n\geq 1) \tag{3.31}$$

Untuk membuktikan hal ini, kita memperhatikan (3.20) bahwa (3.22) ekivalen dengan

$$n\binom{n-1}{0}+n\binom{n-1}{1}+\cdots+n\binom{n-1}{n-1}=n2^{n-1},(n\geq 1) \tag{3.32}$$

Tetapi berdasarkan persamaan (3.21), *n* diganti dengan $n-1$,

$$n\binom{n-1}{0}+n\binom{n-1}{1}+\cdots+n\binom{n-1}{n-1}$$
$$=n\left(\binom{n-1}{0}+\binom{n-1}{1}+\cdots+\binom{n-1}{n-1}\right)=n2^{n-1}.$$

Oleh karena persamaan (3.23) berlaku, maka demikian juga persamaan (3.22). Cara lain untuk membuktikan persamaan (3.22) adalah sebagai berikut: berdasarkan torema binomial,

$$(1+x)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{3}x^3+\cdots+\binom{n}{n}x^n.$$

Jika kedua ruas diturunkan terhadap *x* maka diperoleh

$$n(1+x)^{n-1}=\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}x+3\binom{n}{3}x^2+\cdots+b\binom{n}{n}x^{n-1}.$$

Jika disubtitusi $x = 1$, akan diperoleh persamaan (3.22)

Berbagai identitas penting dapat diturunkan dengan melakukan diferensiasi berturut-turut dan perkalian ekspansi binomial. Kita akan mulai dengan

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k.$$

Dengan mendiferensialkan kedua ruas terhadap *x*, diperoleh

$$n(1+x)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}x^{k-1}.$$

Jika kedua ruas dikali dengan *x* maka didapatkan

$$nx(1+x)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}x^k.$$

Selanjutnya dengan mendiferensialkan kedua sisi terhadap *x* sekali lagi,

$$n\left[(1+x)^{n-1}+(n-1)x(1+x)^{n-2}\right]=\sum_{k=1}^{n}k^2\binom{n}{k}x^{k-1}.$$

Dengan mensubtitusi $n = 1$,

$$n\left[2^{n-1}+(n-1)2^{n-2}\right]=\sum_{k=1}^{n}k^2\binom{n}{k};$$

Karena itu

$$n(n+1)2^{n-2}=\sum_{k=1}^{n}k^2\binom{n}{k};\quad (n\geq 1) \qquad (3.33)$$

Secara berturut-turut dengan mengalikan dengan *x* kemudian mendiferensialkan terhadap *x*, akan diperoleh identitas untuk

$$\sum_{k=1}^{n} k^{p} \binom{n}{k}$$

untuk sebarang *p* bilangan bulat positif.

Identitas untuk jumlah kuadrat bilangan dalam suatu baris segitiga Pascal adalah

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}, \quad (n \geq 0) \tag{3.34}$$

Identitas (3.25) dapat dibuktikan dengan penjelasan kombinatorika. Misalkan *S* adalah himpunan yang memiliki 2*n* elemen. Ruas kanan dari (3.25) menyatakan banyaknya kombinasi-*n* dari *S*. kita mempartisi *S* menjadi dua himpunan bagian, misalnya *A* dan *B*, masing-masing terdiri atas *n* elemen. Kita menggunakan partisi *S* ini untuk mempartisi kombinasi-*n* dari *S*. Masing-masing kombinasi-*n* dari *S* mengandung sejumlah *k* elemen *A*, dan *n*-*k* sisanya adalah elemen *B*. Di sini, *k* adalah sebarang bilangan bulat antara 0 dan *n*. Kita mempartisi kombinasi-*n* dari *S* menjadi *n* + 1 bagian,

$$C_0, C_1, C_2, \cdots, C_n,$$

dimana C_k terdiri dari kombinasi-*n* tersebut yang mengandung *k* elemen dari *A* dan *n* – *k* elemen dari *B*. Menurut prinsip penjumlahan,

$$\binom{n}{n-k}$$

$$\binom{2n}{n} = |C_0| + |C_1| + |C_2| + \cdots + |C_n| \tag{3.35}$$

Suatu kombinasi-*n* dalam C_k diperoleh dengan memilih *k* elemen dari *A* (ada $\binom{n}{k}$ pilihan) dan kemudian $(n-k)$ elemen dari *B* (ada pilihan). Karena itu, berdasarkan prinsip perkalian,

$$|C_k| = \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}^2, \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n).$$

Dengan mensubtitusikan persamaan ini ke dalam persamaan (3.26), diperoleh

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2,$$

dan ini membuktikan (3.26). Generalisasi identitas ini disebut *konvolusi Vandermonde*.

Selanjutnya kita akan memperluas domain dari definisi bilangan $C(n, k)$ untuk memungkinkan *n* sebagai sebarang bilangan real dan *k* sebagai sebarang sebilangan bulat (positif, negatif, maupun nol).

Misalkan *r* adalah suatu bilangan real dan *k* adalah bilangan bulat. Bila didefinisikan koefisien binomial $\binom{r}{k}$ sebagai

$$\binom{r}{k} = \begin{cases} \dfrac{r(r-1)\cdots(r-k-1)}{k!} & \text{jika } k \geq 1 \\ 1 & \text{jika } k = 0 \\ 0 & \text{jika } k \leq -1 \end{cases}$$

misalnya

$$\binom{5/2}{4} = \frac{(5/2)(3/2)(1/2)(-1/2)}{4!} = \frac{-5}{128}$$

$$\binom{-8}{2} = \frac{(-8)(-9)}{2} = 36$$

$$\binom{3{,}2}{0} = 1, \text{ dan}$$

$$\binom{3}{-2} = 0$$

Rumus Pascal dan persamaan (5.2), yaitu

$$\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1} \text{ dan } k\binom{r}{k} = r\binom{r-1}{k-1},$$

berlaku untuk semua *r* dan *k*. Masing-masing rumus tersebut di atas dapat dibuktikan melalui subtitusi langsung. Dengan iterasi rumus Pascal, akan diperoleh dua rumus jumlah untuk koefisien biniomial.

Perhatikan bahwa:

$$\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1},$$

dengan *k* sama dengan suatu bilangan bulat positif. Rumus Pascal dapat diterapkan pada salah satu koefisien binomial ruas kanan dan diperoleh rumusan untuk $C(r, k)$ sebagai jumlah dari tiga koefisien binomial. Misalkan kita menerapkan rumus Pascal secara berulang-ulang pada koefisien binomial kedua yang muncul di dalamnya. Dengan demikian diperoleh:

$$\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1}$$

$$\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k} + \binom{r-2}{k-1} + \binom{r-2}{k-2}$$

$$\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k} + \binom{r-2}{k-1} + \binom{r-3}{k-2} + \binom{r-3}{k-3}$$

$$\vdots$$

$$\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k} + \binom{r-2}{k-1} + \binom{r-3}{k-2} + \cdots$$
$$+ \binom{r-k}{1} + \binom{r-k-1}{0} + \binom{r-k-1}{-1}$$

Suku terakhir $\binom{r-k-1}{-1}$ bernilai 0 dan 1 sehingga dapat dihapuskan. Jika kita menggantikan *r* menjadi *r* + *k* + 1 pada jumlahan sebelumnya dan mentransposkan suku-sukunya, maka diperoleh

$$\binom{r}{0} + \binom{r+1}{1} + \cdots + \binom{r+k}{k} = \binom{r+k+1}{k} \tag{3.36}$$

Identitas (3.27) berlaku untuk semua bilangan real *r* dan semua bilangan bulat *k*. Perhatikan bahwa dalam persamaan (3.27) argumen atas berawal dari *r*, sedangkan argumen bawah berawal dari 0, dan masing-masing argumen selalu bertambah 1.

Selanjutnya kita menerapkan rumus Pascal secara berulang-ulang terhadap koefisien binomial pertama yang muncul di dalamnya. Mialkan *k* adalah bilangan bulat positif, maka:

$$\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1} = \binom{r-2}{k} + \binom{r-2}{k-1} + \binom{r-1}{k-1}$$

$$\binom{r}{k} = \binom{r-3}{k} + \binom{r-3}{k-1} + \binom{r-2}{k-1} + \binom{r-1}{k-1}$$

$$\vdots$$

$$\binom{r}{k} = \binom{r-t}{k} + \binom{r-t}{k-1} + \binom{r-t+1}{k-1} + \cdots + \binom{r-2}{k-1} + \binom{r-1}{k-1}$$

Di sini *t* menyatakan suatu bilangan bulat yang sama dengan bilangan yang diperoleh dari penerapan rumus Pascal. Misalkan sekarang diasumsikan bahwa *r* = *n* adalah suatu bilangan bulat positif. Maka setelah menggunakan rumus Pascal sampai $t = n$, kita akan sampai pada koefisien binomial yang memiliki bilangan argumen atasnya adalah 0. Karena $C(0,k) = 0,$ maka:

$$\binom{n}{k} = \binom{0}{k-1} + \binom{1}{k-1} + \cdots + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-1}{k-1}$$

Selanjutnya dengan menggantikan k menjadi $k + 1$ dan n menjadi $n + 1$ kemudian mentransposkan suku-sukunya,

$$\binom{0}{k} + \binom{1}{k} + \cdots + \binom{n-1}{k} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1} \tag{3.37}$$

Identitas (3.28) berlaku untuk semua bilangan bulat non-negatif k dan n. Identitas ini merupakan bentuk iterasi dari rums Pascal. Jika diambil $k = 1$ di dalam (3.28), diperoleh

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \frac{(n+1)n}{2}.$$

Identitas-identitas yang telah dijelaskan di atas dapat dirumuskan sebagai berikut.

1. $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$
2. $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$
3. $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$
4. $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$
5. $\binom{n}{m}\binom{m}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{m-r}$
6. $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$
7. $(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n$ adalah jumlahan dari semua suku yang berbentuk $\binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_m} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_m^{r_m}$ sedemikian sehingga $r_1 + r_2 + \cdots + r_m = n$.
8. $\binom{n+r+1}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{n+k}{k}$
9. $\binom{n}{r+1} = \dfrac{n-r}{r+1}\binom{n}{r}$
10. $\binom{n+1}{r+1} = \sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r}$
11. $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$
12. $\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k}$
13. $\binom{m+n}{m+r} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}\binom{n}{r+k}$
14. $\binom{m+n+1}{r+s+1} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m-k}{r}\binom{n+k}{s}$, untuk $s \geq n$.

G. Soal-Soal Latihan

1. Untuk setiap kombinasi-4 dari dua sifat (a) dan (b) di bawah ini, hitunglah banyaknya bilangan empat digit yang memiliki digit 1, 2, 3, 4, atau 5.
   (a) Semua digitnya berbeda
   (b) Bilangannya genap

Catatan: dalam hal ini ada empat kasus: $\varnothing$ (tidak ada batasan), {a} (berlaku sifat (a)), {b} (berlaku sifat (b)), {a,b} (berlaku sifat (a) dan sifat (b)).

2. Ada berapa cara menyusun 52 kartu bridge jika semua kartu yang bergambar sama tersusun dalam satu tumpukan?
3. Ada berapa bilangan pembagi positif berbeda yang dimiliki oleh masing-masing bilangan di bawah ini?
   (a) $3^4 \times 5^2 \times 7^6 \times 11$
   (b) 620
   (c) 10^{10}
4. Tentukanlah pangkat terbesar dari 10 yang merupakan faktor dari bilangan-bilangan beriukut ini
   (a) 50!
   (b) 1000!
5. Ada berapa bilangan bulat yang lebih besar dari 5400 yang memiliki kedua sifat di bawah ini?
   (a) Semua digitnya berbeda
   (b) digit 2 dan digit 7 tidak pernah muncul
6. Ada berapa cara 6 pria dan 6 wanita duduk berselang-seling mengelilingi suatu meja bundar?
7. Ada berapa cara 15 orang duduk mengelilingi satu meja bundar jika B tidak mau duduk di dekat A? Bagaimana jika B tidak mau duduk di sebelah kanan A?
8. Ada berapa himpunan yang terdiri atas 3 angka yang dapat disusun dari bilangan-bilangan $\{1, 2, 3, \cdots, 20\}$ jika tidak ada dua bilangan berurut dalam anggota himpunan yang sama?
9. Terdapat 100 siswa di sekolah dan tiga asrama yaitu A, B, dan C masing-masing dengan kapasitas 25, 35, dan 40 orang.
   (a) Ada berapa cara mengisi ketiga asrama tersebut?

(b) Misalkan bahwa dari 100 siswa, 50 di antaranya adalah pria dan 50 adalah wanita. Jika asrama A hanya dibeolehkan untuk siswa pria, asrama B hanya untuk siswa wanita, dan asrama C doleh digunakan oleh siswa pria maupun wanita. Ada berapa cara menempati ketiga asrama tersebut?

10. Suatu ruang kelas dilengkapi dengan 2 baris kursi yang terdiri atas 8 kursi. Ada 14 mahasiswa akan menggunakan ruangan tersebut, 5 di antaranya selalu duduk di baris depan dan 4 orang lainnya selalu duduk di baris belakang. Ada berapa cara ke-14 mahasiswa tersebut duduk di bangku yang tersedia?

11. Suatu pesta dihadiri oleh 15 pria dan 20 wanita.

    (a) Ada berapa cara membentuk 15 pasangan dansa yang terdiri dari 1 pria dan 1 wanita?

    (b) Ada berapa cara membentuk 10 pasangan dansa yang terdiri dari 1 pria dan 1 wanita?

12. Ada berapa permutasi yang dapat dibentuk dari semua huruf dalam kata ADDRESSES? Ada berapa permutasi-8 dapat dibentuk dari kesembilan huruf tersebut?

13. Suatu kelompok yang terdiri atas *mn* orang, akan dibagi menjadi *m* tim yang masing-masing tim terdiri atas *n* pemain.

    (a) Tentukan banyaknya cara menyusun pemain jika setiap tim memiliki nama yang berbeda.

    (b) Tentukan banyaknya cara menyusun pemain jika setiap tim tidak memiliki nama.

14. Misalkan *S* adalah suatu multiset dengan perulangan $n_1, n_2, n_3, \cdots, n_k$ dengan $n_1 = 1$. Misalkan $n = n_2 + n_3 + \cdots + n_k$. Buktikan bahwa banyaknya permutasi keliling dari *S* sama dengan

$$\frac{n!}{n_2!n_3!\cdots n_k!}$$

15. Ada 20 kelereng identik yang disusun dalam satu baris seperti pada gambar berikut:

    ⦿⦿⦿⦿⦿⦿⦿⦿⦿⦿⦿⦿⦿⦿⦿⦿⦿⦿⦿⦿

    Jika enam di antaranya akan dipilih,

    (a) Ada berapa cara memilih keenam kelereng tersebut?

    (b) Ada berapa cara memeilih kelereng sedemikian sehingga kelereng yang dipilih tidak terletak berdekatan

(c) Ada berapa cara memilih kelereng sedemikian sehingga setiap dua kelereng yang dipilih, di antarai oleh setidak-tidaknya 2 kelereng lainnya.

16. Isilah baris pada segitiga Pascal untuk baris 9 dan baris 10.

17. Jabarkanlah $(x+y)^5$ dan $(x+y)^6$ dengan menggunakan teorema binomial

18. Jabarkanlah $(2x-y)^7$ dengan menggunakan teorema binomial.

19. Berapakah koefisien x^5y^{13} dalam $(3x-2y)^{18}$? Berapakah koefisien x^8y^9 ?

20. Gunakan teorema binomial untuk membuktikan bahwa

$$3^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$$

21. Gunakan teorema binomial untuk membuktikan bahwa

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 3^{n-k}.$$

22. Carilah suatu koefisien binomial yang sama dengan pernyataan di bawah ini

$$\binom{n}{k} + 3\binom{n}{k-1} + 3\binom{n}{k-2} + \binom{n}{k-3}.$$

23. Buktikan bahwa

$$\binom{r}{k} = \frac{r}{r-k}\binom{r-1}{k}$$

Untuk suatu bilangan real *r* dan suatu bilangan bulat *k* dengan $r \neq k$.

BAB IV
PRINSIP INKLUSI-EKSKLUSI

Apabila dua tugas dapat dikerjakan secara serempak, maka aturan penjumlahan tidak dapat digunakan untuk menghitung banyaknya cara mengerjakan salah satu dari kedua tugas tersebut. Menjumlahkan banyaknya cara mengerjakan masing-masing tugas akan mengakibatkan perhitungan yang berlebihan karena adanya elemen yang terhitung dua kali. Agar tidak terjadi kesalahan perhitungan seperti ini, maka kita harus memperkurangkan banyaknya cara mengerjakan kedua tugas tersebut. Teknik ini dinamakan **prinsip inklusi-eksklusi**.

Contoh 4.1. Ada berapa banyak bit string yang panjangnya delapan, yang dimulai dengan bit 1 atau berakhir dengan bit 00?

Jawab. *Tugas pertama* yang harus dikerjakan adalah menyusun suatu bit string yang panjangnya 8 yang dimulai dengan bit 1. Tugas ini dapat dikerjakan dalam 2^7 cara. Hal ini diketahui berdasarkan aturan perkalian, karena bit pertama hanya dapat dipilih dalam 1 cara, sedangkan masing-masing tujuh bit berikutnya dapat dipilih dua cara, yaitu 0 atau 1. *Tugas kedua* adalah menyusun bit string yang diakhiri dengan bit 00, yang dapat dipilih dalam $2^6 = 64$ cara. Ini juga diperoleh berdasarkan prinsip perkalian karena masing-masing dari enam bit sebelumnya dapat diplih dalam dua cara dan dua bit terakhir hanya dapat dipilih dalam satu cara. *Kedua tugas* tersebut, yaitu menyusun bit string yang panjangnya 8, yang diawali dengan bit 1 dan diakhiri dengan bit 00 dapat dilakukan dalam $2^5 = 32$ cara. Hal ini dilakukan berdasarkan aturan perkalian, karena bit pertama hanya dapat dilakukan dalam satu cara, dan dua bit terakhir yaitu 00 dapat dilakukan dalam satu cara. Akibatnya, banyaknya bit string yang panjangnya 8 yang diawali dengan bit 1 atau diakhiri dengan bit 00, sama dengan banyaknya cara mengerjakan tugas pertama *atau* banyaknya cara mengerjakan tugas kedua, adalah $128 + 64 - 32 = 160$.

A. Kardinalitas Anggota Himpunan Gabungan

Misalkan suatu himpunan *A* yang terdiri atas *n* subset-subset yaitu $A_1, A_2, \cdots, A_n$. Jika banyaknya anggota himpunan dari masing-masing himpunan tersebut adalah

$|A_1|, |A_2|, \cdots, |A_n|$, maka banyaknya anggota dari himpunan gabungan $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ adalah $|A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$ yaitu $S_n = \left|\bigcup_{i=1}^n A_i\right|$. Dari penjumlahan ini harus diperhatikan bahwa untuk setiap dua himpunan yang dijumlahkan, ada kemungkinan bahwa himpunan irisannya bukan himpunan kosong. Jika terdapat dua himpunan beririsan yang irisannya bukan himpunan kosong, maka kardinalitas himpunan gabungannya akan lebih kecil dari pada gabungan kardinalitas himpunannya. Di sinilah letak pentingnya peranan prinsip inklusi-eksklusi.

Jika suatu himpunan *A* yang terdiri atas *n* subset-subset yaitu $A_1, A_2, \cdots, A_n$ memiliki jumlah anggota himpunan irisan yang dapat diketahui maka

$$\begin{aligned} S_n &= \left|\bigcup_{i=1}^n A_i\right| \\ &= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ &\quad - \ldots + (-1)^{n+1} \cdot |A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_n| \end{aligned} \tag{4.38}$$

Misalkan suatu himpunan *A* terdiri atas empat subset yaitu $A_1 = \{1,2,3\}$, $A_2 = \{2,3,4\}$, $A_3 = \{1,3,5\}$, dan $A_4 = \{2,3\}$. Maka untuk menentukan kardinalitas jumlahan anggota himpunan dari semua subset di atas, misalkanlah bahwa $A_{i,j}$ adalah himpunan irisan antara himpunan A_i dengan A_j, $A_{i,j,k}$ adalah himpunan irisan antara himpunan-himpunan A_i, A_j, A_k, dan $A_{i,j,k,l}$ adalah himpunan irisan antara himpunan A_i, A_j, A_k, A_l. Maka persamaan (4.1) akan berbentuk:

$$\begin{aligned} &|A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| - |A_{1,2}| - |A_{1.3}| - |A_{1,4}| - |A_{2.3}| - |A_{2,4}| - |A_{3,4}| \\ &+ |A_{1,2,3}| + |A_{1,2,4}| + |A_{2,3,4}| + |A_{1,2,3}| - |A_{1,2,3,4}| \end{aligned} \tag{4.39}$$

Karena kardinalitas masing-masing himpunan irisan diketahui secara pasti, maka persamaan (4.2) dapat dituliskan menjadi

$$3+3+3+2-2-2-2-1-2-1+1+2+1+1-1=5$$

Contoh 4.2. Misalkan peserta mata kuliah matematika diskrit terdiri atas 21 orang perempuan dan 16 mahasiswa semester 3. Berapa orang peserta mata kuliah tersebut yang merupakan mahasiswa semester 3 atau mahasiswa yang berjenis kelamin perempuan? Pertanyaan ini sulit dijawab karena informasi yang tersedia tidak memadai. Menjumlahkan semua mahasiswa semester 3 dengan mahasiswa yang berjenis kelamin perempuan mungkin menghasilkan jawaban yang salah, karena mahasiswa semester 3 yang berjenis kelamin perempuan akan terhitung dua kali. Masalah ini menunjukkan bahwa banyaknya mahasiswa di kelas yang merupakan mahasiswa semester 3 atau mahasiswa yang berjenis kelamin perempuan adalah jumlah dari banyaknya mahasiswa perempuan dan banyaknya mahasiswa semester 3 dikurangi mahasiswa semester 3 yang berjenis kelamin perempuan.

Gabungan himpunan A dan B menghasilkan himpunan baru yang elemen-elemennya berasal dari himpunan A dan himpunan B. Jika $n(A)$ adalah banyaknya elemen himpunan A dan $n(B)$ adalah banyaknya elemen himpunan B, maka banyaknya elemen dari gabungan himpunan A dan B adalah $n(A)+n(B)$. Misalkan beberapa elemen himpunan A juga merupakan elemen himpunan B maka elemen himpunan tersebut akan terhitung dua kali dalam $n(A)+n(B)$. Karena itu, jumlah elemen himpunan gabungan harus dinyatakan sebagai jumlah elemen pada masing-masing himpunan dikurangi dengan jumlah elemen yang sama dari kedua himpunan.

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B) \tag{4.40}$$

atau

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B| \tag{4.41}$$

Prinsip inilah yang dinamakan ***prinsip inklusi-eksklusi***. Prinsip inklusi eksklusi berbeda dengan prinsip penjumlahan meskipun keduanya bekerja pada himpunan gabungan. Prinsip penjumlahan menyatakan banyaknya elemen himpunan gabungan dari himpunan-himpunan yang disjoint (saling lepas), sedangkan prinsip inklusi eksklusi menyatakan banyaknya elemen himpunan gabungan dari himpunan-himpunan yang beririsan.

Teorema 4.1. Prinsip Inklusi-Eksklusi Dua dan Tiga Himpunan. Jika A, B, dan C adalah sebarang himpunan berhingga, maka

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

dan

$$n(A\cup B\cup C) \; =n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(A\cap B\cap C)$$

Mahasiswa dapat membuktikan Teorema 4.1 sebagai tugas.

Secara umum, prinsip inklusi-eksklusi dapat dituliskan sebagai berikut:

Misalkan *n* himpunan yang masing-masing adalah

$$A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$$

kemudian

$$S_1 = N(A_1) + \cdots N(A_n),$$

$$S_2 = N(A_1 \cap A_2) + N(A_1 \cap A_3) + N(A_1 \cap A_4) + \cdots + N(A_{n-1} \cap A_n),$$

dan seterusnya, dimana S_k adalah jumlahan dari semua $N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k})$ untuk semua *k* himpunan A_i. Dalam hal ini, S_k terdiri atas $C(n,k)$ suku. Dengan notasi ini, maka dapat dituliskan

$$\begin{aligned}
&N(A_1 \cup A_2) = S_1 - S_2, \\
&N(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = S_1 - S_2 + S_3. \\
&\quad\vdots \\
&N(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n) = S_1 - S_2 + \cdots + (-1)^{i+1} S_i + \cdots + (-1)^{n+1} S_n
\end{aligned}$$

yang dapat dibuktikan dengan induksi matematika sebagai berikut:

Langkah Basis. Jika *n* = 1, maka pernyataan tersebut benar karena $N(A_1) = N(A_1)$

Hipotesis Induksi. Prinsip inklusi-eksklusi berlaku untuk $1 \le m \le k$ himpunan.

Langkah Induksi. Akan dibuktikan bahwa prinsip inklusi-eksklusi berlaku untuk $k+1$ himpunan. Sesuai dengan prinsip inklusi-eksklusi pada kasus dua himpunan,

$$\begin{aligned}
N(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k \cup A_{k+1}) &= N([A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k] \cup A_{k+1}) \\
&= N(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) + N(A_{k+1}) - N([A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k] \cap A_{k+1})
\end{aligned}$$

Dengan menerapkan hipotesis induksi pada $N(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k)$, diperoleh

$$\begin{aligned}
N(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = {} & N(A_1) + N(A_2) + N(A_3) + \cdots + N(A_k) \\
& - N(A_1 \cap A_2) - N(A_1 \cap A_3) - \cdots - N(A_{k-1} \cap A_k) \\
& + N(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + N(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + \cdots \\
& + N(A_{k-2} \cap A_{k-1} \cap A_k) + \cdots \\
& + (-1)^{k+1} N(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_k)
\end{aligned}$$

Dengan hipotesis induksi dan sifat distributif untuk irisan dan gabungan himpunan terhadap $N([A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k] \cap A_{k+1})$, diperoleh

$$\begin{aligned}
N([A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k] \cap A_{k+1}) &= N((A_1 \cap A_{k+1}) \cup (A_2 \cap A_{k+1}) \cup \cdots \cup (A_k \cap A_{k+1})) \\
&= N(A_1 \cap A_{k+1}) + \cdots + N(A_k \cap A_{k+1}) - N(A_1 \cap A_2 \cap A_{k+1}) - \cdots \\
&\quad - N(A_{k-1} \cap A_k \cap A_{k+1}) + \cdots \\
&\quad + (-1)^{k+1} N(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_{k+1})
\end{aligned}$$

Karena itu,

$$\begin{aligned} N(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{k+1}) = & N(A_1) + N(A_2) + N(A_3) + \cdots + N(A_{k+1}) \\ & - N(A_1 \cap A_2) - N(A_1 \cap A_3) - \cdots - N(A_k \cap A_{k+1}) \\ & + N(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + N(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + \cdots \\ & + N(A_{k-2} \cap A_k \cap A_{k+1}) + \cdots \\ & + (-1)^{k+2} N(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_{k+1}) \end{aligned} \tag{4.42}$$

Contoh 4.3. Menentukan jumlah elemen himpunan gabungan

a. Ada berapa banyak bilangan bulat antara 1 sampai dengan 1000 yang merupakan kelipatan 3 atau kelipatan 5?
b. Ada berapa banyak bilangan bulat antara 1 sampai dengan 1000 yang bukan merupakan kelipatan 3 dan juga bukan kelipatan 5?

Jawab.

a. Banyaknya bilangan bulat antara 1 sampai dengan 1000 yang merupakan kelipatan 3 atau kelipatan 5.

Misalkan A = himpunan semua bilangan bulat antara 1 sampai dengan 1000 yang merupakan kelipatan 3.
Misalkan B = himpunan semua bilangan bulat antara 1 sampai dengan 1000 yang merupakan kelipatan 5.

Maka
$A \cup B =$ himpunan semua bilangan bulat antara 1 sampai dengan 1000 yang merupakan kelipatan 3 atau kelipatan 5.
dan
$A \cap B =$ himpunan semua bilangan bulat antara 1 sampai dengan 1000 yang merupakan kelipatan 3 dan juga kelipatan 5 (yaitu bilangan kelipatan 15). Selanjutnya ditentukan $n(A), n(B), \text{dan}\, n(A \cap B)$ kemudian menerapkan prinsip inklusi-eksklusi untuk menghitung $n(A \cup B)$. Karena setiap bilangan bulat ketiga antara 1 sampai dengan 1000 adalah kelipatan 3, maka masing-masing bilangan tersebut dapat dinyatakan dengan $3k$ untuk beberapa bilangan bulat k antara 1

sampai dengan 333. Jadi ada 333 bilangan kelipatan 3 yang terletak di antara 1 sampai dengan 1000, artinya $n(A) = 333$.

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots & 996 & 997 & 998 & 999 & 1000 \\
 & & \updownarrow & & & \updownarrow & \cdots & \updownarrow & & & \updownarrow & \\
 & & \boxed{3}.1 & & & \boxed{3}.2 & \cdots & \boxed{3}.332 & & & \boxed{3}.333 &
\end{array}
$$

Demikian pula, setiap bilangan bulat kelima antara 1 sampai dengan 1000 adalah kelipatan 5, maka masing-masing bilangan tersebut dapat dinyatakan dengan $5k$ untuk beberapa bilangan bulat k antara 1 sampai dengan 200. Jadi ada 200 bilangan kelipatan 5 yang terletak di antara 1 sampai dengan 1000, artinya $n(B) = 200$.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots & 995 & 997 & 998 & 999 & 1000 \\
 & & & & \updownarrow & & \cdots & \updownarrow & & & & \updownarrow \\
 & & & & \boxed{5}.1 & & \cdots & \boxed{5}.199 & & & & \boxed{5}.200
\end{array}
$$

Yang terakhir, setiap bilangan bulat ke-15 antara 1 sampai dengan 1000 adalah kelipatan 15, maka masing-masing bilangan tersebut dapat dinyatakan dengan $15k$ untuk beberapa bilangan bulat k antara 1 sampai dengan 66. Jadi ada 66 bilangan kelipatan 15 yang terletak di antara 1 sampai dengan 1000, artinya $n(A \cap B) = 66$.

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
1 & 2 & \cdots & 15 & \cdots & 30 & \cdots & 975 & \cdots & 990 & \cdots & 1000 \\
 & & \cdots & \updownarrow & \cdots & \updownarrow & \cdots & \updownarrow & \cdots & \updownarrow & \cdots & \\
 & & \cdots & \boxed{15}.1 & \cdots & \boxed{15}.2 & \cdots & \boxed{15}.65 & \cdots & \boxed{15}.66 & \cdots &
\end{array}
$$

Berdasarkan prinsip inklusi eksklusi, banyaknya bilangan bulat kelipatan 3 atau kelipatan 5 antara 1 sampai dengan 1000 adalah

$$
\begin{aligned}
n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\
&= 333 + 200 - 66 \\
&= 467
\end{aligned}
$$

b. Banyaknya bilangan bulat antara 1 sampai dengan 1000 yang bukan merupakan kelipatan 3 dan juga bukan kelipatan 5.

Diketahui ada 1000 bilangan bulat antara 1 sampai dengan 1000. Dari penyelesaian a) di atas, 467 di antaranya adalah kelipatan 3 atau kelipatan 5. Jadi berdasarkan prinsip selisih himpunan, terdapat 1000 – 467 = 533 bilangan yang bukan kelipatan 3 dan juga bukan kelipatan 5.

Perhatikan bahwa penyelesaian bagian (b) di atas pada dasarnya menggunakan hukum De Morgan. Banyaknya elemen yang bukan anggota himpunan A maupun anggota B adalah $n\left(A^c \cap B^c\right)$, dan menurut hukum De Morgan $A^c \cap B^c = \left(A \cup B\right)^c$. Jadi $n\left(\left(A \cup B\right)^c\right)$ dihitung dengan menggunakan aturan selisih himpunan yaitu $n\left(\left(A \cup B\right)^c\right) = n\left(U\right) - n\left(A \cup B\right)$, dimana U adalah himpunan semua bilangan bulat dari 1 sampai dengan 1000.

Contoh 4.4. Menentukan Banyaknya Elemen dalam Irisan Himpunan

Seorang dosen mata kuliah Matematika Diskrit memberikan angket untuk mengetahui jumlah mahasiswa yang telah lulus mata kuliah Kalkulus Dasar, Kalkulus Lanjut, dan Pemrograman Java. Dari 50 orang mahasiswa, diperoleh data sebagai berikut.

30 orang telah lulus mata kuliah Kalkulus Dasar

18 orang telah lulus mata kuliah Kalkulus Lanjut

26 orang telah lulus mata kuliah Pemrograman Java

9 orang telah lulus mata kuliah Kalkulus Dasar dan Kalkulus Lanjut

16 orang telah lulus mata kuliah Kalkulus Dasar dan Pemrograman Java

8 orang telah lulus mata kuliah Kalkulus Lanjut dan Pemrograman Java

47 orang telah lulus sekurang-kurangnya satu mata kuliah tersebut.

Perhatikan bahwa pernyataan “30 orang mahasiswa telah lulus mata kuliah Kalkulus Dasar”, artinya jumlah mahasiswa yang telah melulusi mata kuliah Kalkulus dasar ada 30 orang, tetapi ada kemungkinan bahwa ke-30 mahasiswa tersebut juga telah melulusi salah satu atau kedua mata kuliah lainnya. Mahasiswa yang hanya melulusi salah satu mata kuliah saja akan disebutkan secara seksplisit.

a. Berapa mahasiswa yang belum melulusi ketiga mata kuliah tersebut?
b. Berapa mahasiswa yang telah melulusi ketiga mata kuliah tersebut?
c. Berapa mahasiswa yang telah melulusi Kalkulus Dasar dan Kalkulus Lanjut tetapi belum lulus Pemrograman Java?

d. Berapa mahasiswa yang telah melulusi Kalkulus Dasar tetapi belum lulus Kalkulus Lanjut dan Pemrograman Java?

Jawab.

a. Berdasarkan aturan selisih himpunan, banyaknya mahasiswa yang belum melulusi ketiga mata kuliah tersebut adalah banyaknya mahasiswa di dalam kelas dikurangi banyaknya mahasiswa yang telah lulus sekurang-kurangnya salah satu mata kuliah. Jadi banyaknya mahasiswa yang belum melulusi ketiga mata kulah tersebut ada 50 – 47 = 3 orang.

b. Misalkan A adalah himpunan mahasiswa yang telah lulus mata kuliah Kalkulus Dasar, B adalah himpunn mahasiswa yang telah lulus mata kuliah Kalkulus Lanjut, dan C adalah himpunan mahasiswa yang telah lulus mata kuliah Pemrograman Java. Berdasarkan prinsip inklusi-eksklusi,

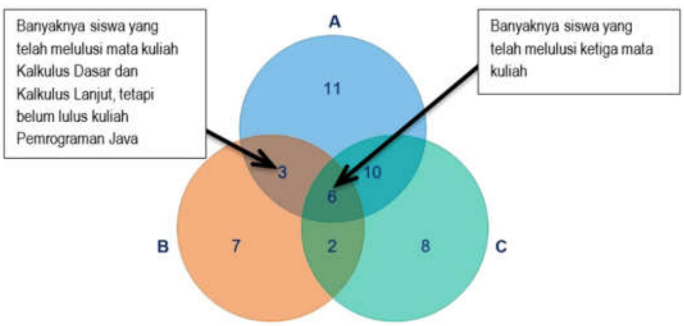
$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)$$
$$-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$

Dengan mensubtitusikan nilai-nilai yang telah diketahui, diperoleh

$47 = 30 + 26 + 18 – 9 – 16 – 8 + n(A\cap B\cap C)$.

Sehingga diketahui bahwa $n(A\cap B\cap C)=6$. Dengan demikian banyaknya mahasiswa yang telah melulusi ketiga mata kuliah tersebut ada 6 orang. Secara umum, jika tujuh dari delapan variabel di dalam rumus inklusi-eksklusi yang melibatkan tiga himpunan, maka variabel kedelapan dapat ditentukan.

c. Untuk menjawab bagian (c), perhatikan Gambar 4.1 di bawah ini.



Gambar 4.1. Himpunan $A\cup B\cup C$

Ada berapa anggota himpunan yang terdapat di dalam gabungan dua himpunan? Banyaknya anggota himpunan gabungan dari himpunan A dan himpunan B adalah banyaknya anggota himpunan tersebut dikurangi banyaknya anggota irisan dari kedua himpunan tersebut.

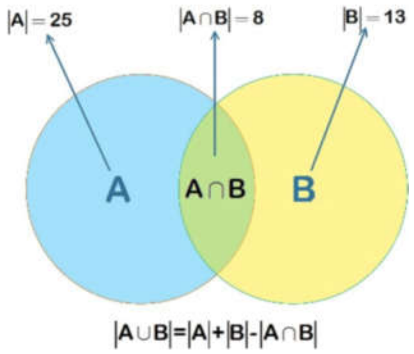
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Contoh 4.5: Semua mahasiswa peserta mata kuliah Matematika Diskrit sudah lulus mata kuliah Metode Komputasi I atau Kalkulus I, atau keduanya. Jumlah mahasiswa yang telah lulus mata kuliah Metode Komputasi I adalah 25; jumlah mahasiswa yang telah lulus mata kuliah Kalkulus I adalah 13; dan banyaknya mahasiswa yang telah lulus mata kuliah Metode Komputasi I maupun mata kuliah Kalkulus I adalah 8 orang. Berapakah jumlah total mahasiswa peserta mata kuliah Matematika Diskrit?

Jawab. Misalkan A adalah himpunan mahasiswa peserta mata kuliah Matematika Diskrit yang telah lulus Metode Komputasi I, dan B adalah himpunan mahasiswa peserta mata kuliah Matematika Diskrit yang telah lulus Kalkulus I. Dari hal ini diketahui bahwa $A \cap B$ adalah himpunan mahasiswa peserta mata kuliah Matematika Diskrit yang telah lulus mata kuliah Metode Komputasi I dan Kalkulus I. Karena semua mahasiswa peserta mata kuliah Matematiak Diskrit telah lulus Metode Komputasi I atau Kalkulus I atau keduanya, maka dapat disimpulkan bahwa banyaknya mahasiswa peserta mata kuliah Matematika Diskrit adalah $|A \cup B|$.

$$\begin{aligned} |\mathrm{A} \cup \mathrm{B}| &= |\mathrm{A}| + |\mathrm{B}| - |\mathrm{A} \cap \mathrm{B}| \\ &= 25 + 13 - 8 = 30. \end{aligned}$$

Jadi jumlah mahasiswa peserta mata kuliah Matematika Diskrit ada sebanyak 30 orang.



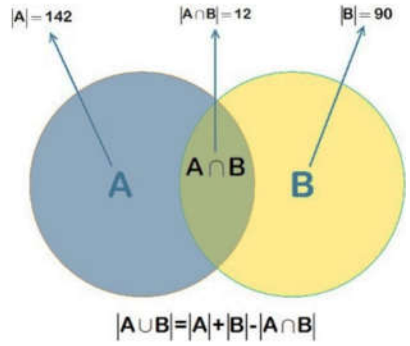
Gambar 4.2. Himpunan $A \cup B$

Contoh 4.6: Ada berapa bilangan bulat positif kurang dari 1000 yang merupakan kelipatan 7 atau 11?

Jawab. Misalkan A adalah himpunan bilangan bulat positif tidak lebih dari 1000 yang merupakan kelipatan 7, dan B adalah himpunan bilangan bulat positif tidak lebih dari 1000 yang merupakan kelipatan 11. Dengan demikian $A \cup B$ adalah himpunan bilangan bulat positif tidak lebih dari 1000 yang merupakan kelipatan 7 atau kelipatasn 11, dan $A \cap B$ adalah bilangan bulat positif tidak lebih dari 1000 yang merupakan kelipatan 7 dan 11. Mahasiswa dapat menunjukkan bahwa di antara bilangan bulat positif yang tidak lebih dari 1000 terdapat [1000/7] bilangan yang merupakan kelipatan 7, dan [1000/11] merupakan kelipatan 11. Karena 7 dan 11 merupakan prima relatif, maka bilangan yang merupakan keipatan 7 dan 11 adalah bilangan yang merupakan kelipatan 7 x 11. Akibatnya terdapat [1000/(11 x 7)] bilangan bult positif yang tidak lebih dari 1000 yang merupakan kelipatan 7 dan juga kelipatan 11.

$$\begin{aligned}
\left|A \cup B\right| &= \left|A\right| + \left|B\right| - \left|A \cap B\right| \\
&= \left|\frac{1000}{7}\right| + \left|\frac{1000}{11}\right| - \left|\frac{1000}{7\text{x}11}\right| \\
&= 142 + 90 - 12 = 220
\end{aligned}$$

Jadi ada 220 bilangan bulat positif yang tidak lebih dari 1000 yang merupakan kelipatan 7 sekaligus sebagai kelipatan 11.



Gambar 4.3. Himpunan $A \cup B$

Contoh 4.7. Tentukanlah banyaknya bilangan bulat antara 1 dan 600 (inklusif) yang bukan kelipatan 6.

Jawab. Banyaknya bilangan bulat antara 1 dan 600 yang merupakan kelipatan 6 adalah 600/6 = 100 karena setiap bilangan bulat keenam merupakan kelipatan 6. Karena itu banyaknya bilangan bulat antara 1 dan 600 yang bukan kelipatan 6 ada 600 – 100 = 500 bilangan.

Contoh 4.8. Suatu stasion televisi melakukan survei respon 100 orang pemirsa mengenai tiga tayangan acara A, B, dan C. Hasil survey menunjukkan bahwa 20 orang menonton tayangan A, 16 orang menonton acara B, 14 orang menonton acara C, 8 orang menonton A dan B, 5 orang menonton A dan C, 4 orang menonton B dan C, dan 2 orang menonton ketiga acara tersebut. Ada berapa orang yang tidak menonton ketiga acara tersebut?

Jawab. Akan ditentukan banyaknya N (yaitu banyaknya pemirsa yang tidak menonton acara A, B, maupun C) yaitu N – N(A atau B atau C), dengan N adalah jumlah pemirsa yang disurvei. Berdasarkan prinsip inklusi-eksklusi,

$$\begin{aligned} N(A^c \cap B^c \cap C^c) &= N - N(A \cup B \cup C) \\ &= N - N(A) - N(B) - N(C) + N(A \cap B) + N(A \cap C) \\ &\quad + N(B \cap C) - (A \cap B \cap C) \\ &= 100 - 20 - 16 - 14 + 8 + 5 + 4 - 2 = 65 \end{aligned}$$

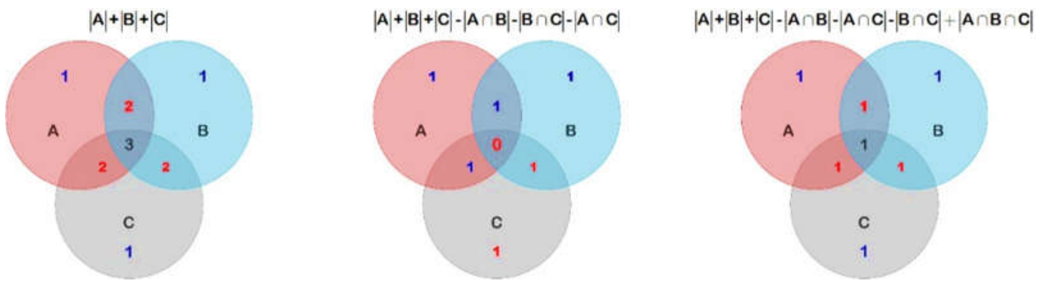
Contoh 4.9. Misalkan 1807 mahasiswa terdaftar aktif di suatu universitas. Sebanyak 453 di antaranya memprogramkan mata kuliah Komputer, 567 memprogramkan mata kuliah Metode Numerik, dan 299 memprogramkan kedua mata kuliah tersebut. Berapa orang yang tidak memprogramkan kedua mata kuliah tersebut?

Jawab. Untuk menentukan jumlah mahasiswa yang tidak memprogramkan mata kuliah Komputer maupun Metode Numerik, maka jumlah mahasiswa harus dikurangkan dengan jumlah mahasiswa yang memprogramkan mata kuliah Komputer dan mata kuliah Metode Numerik. Misalkan A adalah jumlah mahasiswa yang memprogramkan mata kuliah Komputer dan B adalah jumlah mahasiswa yang memprogrmkan mata kuliah Metode Numerik. Jadi diketahui bahwa $|A| = 453, |B| = 567, \text{dan} \ |A \cap B| = 299.$ Jumlah mahasiswa yang memprogramkan mata kuliah Komputer atau mata kuliah Metode Numerik adalah

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 453 + 567 - 299 = 721.$$

Dengan demikian jumlah mahasiswa yang tidak memprogramkan mata kuliah Komputer maupun Metode Numerik adalah 1807 – 721 = 1086.

Selanjutnya akan dirumuskan cara menentukan banyaknya elemen-elemen di dalam gabungan himpunan-himpunan yang berhingga. Rumusan tersebut dinamakan prinsip inklusi-eksklusi. Untuk jelasnya, sebelum membicarakan gabungan dari *n* himpunan, dengan *n* adalah sebarang bilangan bulat positif, perlu dipahami suatu rumusan untuk menentukan banyaknya elemen di dalam gabungan dari tiga himpunan yaitu himpunan A, B, dan C. Gambar 3 di bawah ini memperlihatkan elemen-elemen tertentu dapat terhitung berulang, bahkan ada yang tidak terhitung. Oleh karena itu mahasiswa harus teliti menggunakan operasi yang benar untuk mengetahui banyaknya elemen di dalam daerah tertentu.



Gambar 4.4. Himpunan $A \cup B \cup C$

Contoh 4.10. Ada berapa banyak solusi dari $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ jika $x_1, x_2, \text{dan } x_3$ merupakan bilangan-bilangan bulat nonnegatif dengan

$$x_1 \leq 3, x_2 \leq 4, \text{dan } x_3 \leq 6?$$

Jawab. Untuk menyelesaikan masalah tersebut di atas dengan menggunakan prinsip inklusi-eksklusi, maka dimisalkan suatu solusi memiliki sifat P_1 jika $x_1 > 3,$ memiliki sifat P_2 jika $x_2 > 4,$ dan memiliki sifat P_3 jika $x_3 > 6.$ Banyaknya solusi yang memenuhi ketidaksamaan $x_1 \leq 3, x_2 \leq 4, \text{dan } x_3 \leq 6$ adalah

$$\begin{aligned} N(P_1'P_2'P_3') &= N - N(P_1) - N(P_2) - N(P_3) \\ &\quad + N(P_1P_2) + N(P_1P_3) + N(P_2P_3) \\ &\quad - N(P_1P_2P_3) \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa

N = banyaknya solusi keseluruhan yaitu $C(3+11-1,11)=78$,

$N(P_1)$ = banyaknya solusi jika $x_1 \geq 4 = C(3+7-1,7)=C(9,7)=36$,

$N(P_2)$ = banyaknya solusi jika $x_2 \geq 5 = C(3+6-1,6)=C(8,6)=28$,

$N(P_3)$ = banyaknya solusi jika $x_3 \geq 7 = C(3+4-1,4)=C(6,4)=15$,

$N(P_1P_2)$ = banyaknya solusi jika $x_1 \geq 4$ dan $x_2 \geq 5$, yaitu $C(3+2-1,2)=6$,

$N(P_1P_3)$ = banyaknya solusi jika $x_1 \geq 4$ dan $x_3 \geq 7$, yaitu $C(3+0-1,0)=1$,

$N(P_2P_3)$ = banyaknya solusi jika $x_2 \geq 5$ dan $x_3 \geq 7$, yaitu 0,

$N(P_1P_2P_3)$ = banyaknya solusi jika $x_1 \geq 4, x_2 \geq 5,$ dan $x_3 \geq 7$ yaitu 0.

Dengan mensubtitusi kuantitas-kuanitas ini ke dalam $N(P_1'P_2'P_3')$ dapat ditunjukkan bahwa banyaknya solusi dengan $x_1 \leq 3, x_2 \leq 4,$ dan $x_3 \leq 6$ sama dengan

$$N(P_1'P_2'P_3') \quad = 78-36-28-15+6+1+0-0=6$$

Contoh 4.11. Ada berapa string biner 7-digit yang memuat angka 1 berjumlah ganjil?

Jawab. Misalkan A adalah himpunan semua string biner 7-digit yang memuat angka 1 berjumlah ganjil, maka jawaban yang dicari adalah $|A|$. untuk menghitung $|A|$, maka himpunan A dipartisi atas beberapa bagian yang lebih kecil. Angka 1 yang berjumlah ganjil di dalam string biner 7-digit kemungkinan terdiri dari satu, tiga, lima, atau tujuh angka 1. Misalkan A_1 adalah himpunan string biner 7-digit yang memuat hanya satu angka 1, A_3 adalah himpunan string biner 7-digit yang memuat tiga angka 1, A_5 adalah himpunan string biner 7-digit yang memuat lima angka 1, dan A_7 adalah himpunan string biner 7-digit yang memuat tujuah angka 1. Karena itu dapat dituliskan $A = A_1 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7$. Dapat dilihat bahwa sebarang dua himpunan A_i tidak memiliki irisan sehingga $|A| = |A_1| + |A_3| + |A_5| + |A_7|$.

Selanjutnya, akan ditentukan nilai-nilai dari masing-masing suku. Misalkan untuk A_3, himpunan string biner 7-digit yang memuat tiga angka 1. String seperti ini dapat dibentuk dengan memilih tiga posisi untuk angka 1 dan menempatkan angka 0 untuk keempat posisi lainnya. Dengan kata lain $|A_3| = C(7,3)$. Demikian juga,

$\left|A_1\right| = C(7,1), \left|A_5\right| = C(7,5)$, dan $\left|A_7\right| = C(7,7)$. Akhirnya dapat diketahui bahwa jawaban yang dicari adalah

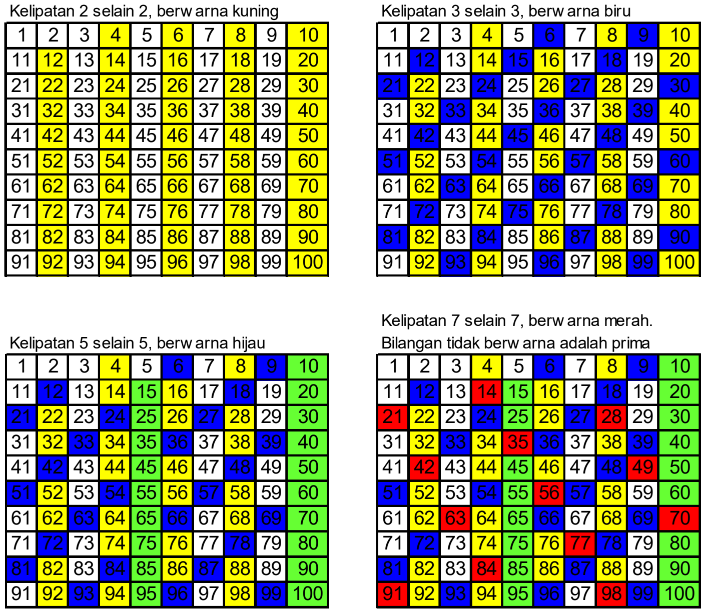
$$\begin{aligned} |A| &= |A_1| + |A_3| + |A_5| + |A_7| \\ &= C(7,1) + C(7,3) + C(7,5) + C(7,7) \\ &= 7 + 35 + 21 + 1 \\ &= 64. \end{aligned}$$

Jadi banyaknya string biner 7-digit yang memuat angka 1 berjumlah ganjil ada 64.

B. Saringan Eratosthenes

Bilangan bulat komposit (bilangan asli yang lebih besar dari 1 dan bukan bilangan prima) yang kurang dari 100 mempunyai suatu faktor prima yang tidak lebih besar dari 10. Karena bilangan prima yang kurang dari 10 hanya terdiri atas 2, 3, 5, dan 7, maka bilangan prima yang tidak lebih besar dari 100 adalah keempat bilangan ini, serta bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1 dan tidak lebih dari 100, yang dapat dibagi oleh bilangan selain 2, 3, 5, dan 7.

Saringan Eratosthenes digunakan untuk mencari semua bilangan prima yang tidak lebih dari suatu bilangan bulat tertentu. Sebagai contoh, prosedur di bawah ini digunakan untuk mencari bilangan prima yang tidak lebih dari 100. Langkah pertama yang akan dilakukan adalah dengan mendaftar semua bilangan bulat antara 1 dan 100. Proses penyaringan dimulai dengan menghapus semua bilangan bulat kelipatan 2, kecuali 2. Selanjutnya karena 3 adalah bilangan bulat pertama yang lebih dari 2 yang tidak dihapus, maka semua bilangan bulat kelipatan 3 dihapus, kecuali 3. Demikian juga, karena 5 adalah bilangan berikutnya yang tidak dihapuskan, maka semua bilangan bulat kelipatan 5 kecuali 5, dihapus. Kemudian, bilangan berikutnya adalah 7. Semua bilangan bulat kelipatan 7 dihapus, kecuali 7. Karena semua bilangan bulat komposit yang tidak lebih dari 100 merupakan kelipatan 2, 3, 5, atau 7, maka semua bilangan lainnya kecuali 1 adalah bilangan prima. Jadi bilangan prima yang kurang dari 100 adalah 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, dan 97.



Gambar 4.5. Saringan Eratosthenes

Dengan menggunakan prinsip inklusi-eksklusi dapat diketahui banyaknya bilangan prima yang tidak lebih besar dari suatu bilangan bulat positif tertentu, dengan cara yang sama dengan yang dilakukan dalam saringan Eratosthenes. Perlu diingat kembali bahwa suatu bilangan bulat komposit adalah bilangan yang merupakan kelipatan dari suatu bilangan prima yang tidak lebih besar dari akar kuadratnya. Jadi untuk mengetahui banyaknya bilangan priam yang tidak lebih besar dari 100 maka harus terlebih dulu diingat bahwa bilangan bulat komposit yang tidak lebih besar dari 100 pasti memiliki faktor prima yang tidak lebih besar dari 10. Karena bilangan-bilangan prima yang tidak lebih besar dari 10 adalah 2, 3, 5, dan 7, maka bilangan prima yang tidak lebih dari 100 adalah bilangan-bilangan prima tersebut di atas serta bilangan yang bukan kelipatan dari keempat bilangan tersebut. Untuk menerapkan prinsip inklusi-eksklusi, misalkan:

P_1 adalah sifat bilangan bulat kelipatan 2,

P_2 adalah sifat bilangan bulat kelipatan 3,

P_3 adalah sifat bilangan bulat kelipatan 5, dan

P_4 adalah sifat bilangan bulat kelipatan 7.

Dengan demikian, banyaknya bilangan prima yang tidak melebihi 100 adalah

$$4 + N\left(P_1' P_2' P_3' P_4'\right).$$

Karena ada 99 bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1 dan tidak melebihi 100, maka berdasarkan prinsip inklusi-eksklusi,

$$
\begin{aligned}
N(P_1'P_2'P_3'P_4') = 99 &- N(P_1) - N(P_2) - N(P_3) - N(P_4) \\
&+ N(P_1P_2) + N(P_1P_3) + N(P_1P_4) + N(P_2P_3) + N(P_2P_4) + N(P_3P_4) \\
&- N(P_1P_2P_3) - N(P_1P_2P_4) - N(P_1P_3P_4) - N(P_2P_3P_4) \\
&+ N(P_1P_2P_3P_4)
\end{aligned}
$$

Banyaknya bilangan bulat yang tidak lebih besar dari 100 (tetapi lebih besar dari 1) yang merupakan kelipatan dari semua bilangan prima di dalam suatu subset {2, 3, 5, 7} adalah [100/*N*], dimana *N* adalah hasil perkalian dari bilangan-bilangan prima di dalam subset ini. Hal ini disebabkan karena sebarang dua bilangan prima tersebut tidak memiliki faktor persekutuan. Akibatnya,

$$
\begin{aligned}
N(P_1'P_2'P_3'P_4') &= 99 - \left[\frac{100}{2}\right] - \left[\frac{100}{3}\right] - \left[\frac{100}{5}\right] - \left[\frac{100}{7}\right] \\
&\quad + \left[\frac{100}{2.3}\right] + \left[\frac{100}{2.5}\right] + \left[\frac{100}{2.7}\right] + \left[\frac{100}{3.5}\right] + \left[\frac{100}{3.7}\right] + \left[\frac{100}{5.7}\right] \\
&\quad - \left[\frac{100}{2.3.5}\right] - \left[\frac{100}{2.3.7}\right] - \left[\frac{100}{2.5.7}\right] - \left[\frac{100}{3.5.7}\right] + \left[\frac{100}{2.3.5.7}\right] \\
&= 99 - 50 - 33 - 20 - 14 \\
&\quad + 16 + 10 + 7 + 6 + 4 + 2 \\
&\quad - 3 - 2 - 1 - 0 + 0 \\
&= 21
\end{aligned}
$$

Dalam hal ini, ada 4 + 21 = 25 bilangan prima yang tidak lebih besar dari 100.

Misalkan *S* menyatakan himpunan 100 orang mahasiswa yang mengikuti program matrikulasi pada suatu universitas. Jadi, $|S| = 100.$ Selanjutnya, misalkan c_1, c_2 menyatakan sifat-sifat atau syarat-syarat yang terpenuhi oleh beberapa anggota dari *S*, yaitu:

- c_1 adalah 35 orang mahasiswa (di antara 100 orang peserta matrikulasi) yang memprogramkan program matrikulasi mata kuliah A, dinyatakan dengan $N(c_1) = 35.$
- c_2 adalah 30 orang mahasiswa (di antara 100 orang peserta matrikulasi) yang memprogramkan program matrikulasi mata kuliah B, dinyatakan dengan $N(c_2) = 30.$

Jika 9 orang mahasiswa mengikuti kedua mata kuliah program matrikulasi, maka $N(c_1c_2) = 9.$

Penjelasan:

Dari 100 orang mahasiswa ini, terdapat 100 - 35 = 65 orang yang tidak mengikuti matrikulasi A. Jika banyaknya anggota $|S|$ dinyatakan dengan *N*, maka dituliskan $N(\overline{c}_1) = N - N(c_1)$. Dengan cara yang sama, dapat ditentukan bahwa $N(\overline{c}_2) = N - N(c_2) = 100 - 30 = 70$ yang tidak mengikuti matrikulasi B. Banyaknya peserta matrikulasi yang tidak mengikuti program matrikulasi B adalah $N(c_1\overline{c}_2) = N(c_1) - N(c_1c_2) = 35 - 9 = 26.$ Demikian pula, banyak nya peserta matrikulasi yang mengikuti program matrikulasi B tetapi tidak memprogramkan matrikulasi A adalah

$$N(\overline{c}_1c_2) = N(c_2) - N(c_1c_2) = 30 - 9 = 21.$$

100 orang mahasiswa baru yang tidak mengikuti program matrikulasi A maupun B adalah $N(\overline{c}_1\overline{c}_2)$. Karena $N(\overline{c}_1) = N(\overline{c}_1c_2) + N(\overline{c}_1\overline{c}_2)$, maka dapat disimpulkan bahwa $N(\overline{c}_1\overline{c}_2) = N(\overline{c}_1) - N(\overline{c}_1c_2) = 65 - 21 = 44.$

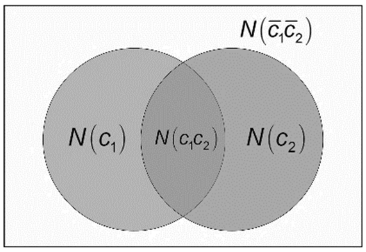
Dari penjelasan tersebut di atas, dapat juga dilihat bahwa

$$\begin{aligned} N(\overline{c}_1\overline{c}_2) &= N(\overline{c}_1) - N(\overline{c}_1c_2) = [N - N(c_1)] - [N(c_2) - N(c_1c_2)] \\ &= N - N(c_1) - N(c_2) + N(c_1c_2) \\ &= N - [N(c_1) + N(c_2)] + N(c_1c_2) \\ &= 100 - [35 + 30] + 9 = 44 \end{aligned}$$

Berdasarkan diagram Venn di bawah ini, dapat diketahui bahwa jika $N(c_1)$ menyatakan banyaknya elemen di *S* dalam lingkaran sebelah kiri, dan $N(c_2)$ adalah banyaknya elemen di *S* dalam lingkaran sebelah kanan, maka $N(c_1c_2)$ menyatakan elemen-elemen di *S* yang berada daerah irisan, sedangkan $N(\overline{c}_1\overline{c}_2)$ menyatakan elemen-elemen di *S* yang berada di luar daerah gabungan kedua lingkaran tersebut. Akibatnya, dari gambar diagram Venn dapat diketahui bahwa

$$N(\overline{c}_1\overline{c}_2) = N - [N(c_1) + N(c_2)] + N(c_1c_2)$$

Suku terakhir, $N(c_1c_2)$, ditambahkan untuk mengeliminasi penjumlahan ganda pada suku $[N(c_1) + N(c_2)]$



Perhatikan bahwa $N(\bar{c}_1\bar{c}_2)$ tidak sama dengan $N(\overline{c_1c_2})$ karena $N(\overline{c_1c_2}) = N - N(c_1c_2) = 100 - 9 = 91$ sedangkan $N(\bar{c}_1\bar{c}_2) = 44$. Meskipun demikian, dapat dibuktikan bahwa $N(\bar{c}_1 \text{ atau } \bar{c}_2) = N(\overline{c_1c_2}) = N(\bar{c}_1) + N(\bar{c}_2) - N(\bar{c}_1\bar{c}_2)$ $= 65 + 70 - 44 = 91$.

C. Prinsip Inklusi-Eksklusi

Pada bagian ini akan dijelaskan cara penghitungan yang disebut prinsip inklusi-eksklusi. Seperti telah diketahui, aturan penjumlahan merupakan cara yang sederhana untuk menghitung banyaknya objek di dalam suatu himpunan gabungan tanpa adanya objek yang terhitung lebih dari satu kali (yaitu dengan menyatakan himpunan sebagai partisi). Prinsip inklusi-eksklusi memberikan suatu rumus untuk masalah yang sangat umum di mana himpunan-himpunan tidak beririsan. Rumus tersebut lebih kompleks tetapi dapat digunakan dalam masalah yang lebih luas.

Pada bagian sebelumnya, telah ditunjukkan bahwa menghitung secara tidak langsung objek-objek di dalam suatu himpunan seringkali lebih mudah dari pada menghitung objek tersebut secara langsung.

Contoh 4.12. Hitunglah permutasi $i_1i_2\cdots i_n$ dari $\{1, 2, \cdots, n\}$ dimana 1 tidak ditempatkan pada urutan pertama ($i_1 \neq 1$).

Jawab. Permutasi tersebut dapat dihitung secara langsung dengan memperhatikan bahwa angka 1 tidak menempati posisi pertama dapat dibagi menjadi *n* – 1 bagian berdasarkan *k* banyaknya bilangan bulat dari $\{2, 3, \cdots, n\}$ yang akan menempati psisi angka pertama. Permutasi dengan *k* pada posisi angka pertama terdiri atas *k* diikuti oleh permutasi dari himpunan yang memiliki (*n* – 1) elemen, yaitu $\{1, \cdots, k-1, k+1, \cdots, n\}$. Dengan demikian, ada $(n-1)!$ permutasi dari $\{1,2,\cdots,n\}$ dengan *k* berada di posisi bilangan pertama. Berdasarkan prinsip penjumlahan, ada $(n-1)!(n-1)$ permutasi dari $\{1,2,\cdots,n\}$ dimana angka 1 tidak menempati posisi bilangan pertama.

Selain itu, dapat juga dilakukan penghitungan langsung dengan memperhatikan bahwa banyaknya permutasi dari $\{1,2,\cdots,n\}$ dimana angka 1 berada pada posisi bilangan pertama sama dengan banyaknya $(n-1)!$ dari permutasi $\{2,3,\cdots,n\}$. Karena total banyaknya permutasi $\{1,2,\cdots,n\}$ adalah *n*!, maka banyaknya permutasi dari $\{1,2,\cdots,n\}$ dimana angka 1 tidak menempati posisi pertama adalah $n!-(n-1)!=(n-1)!(n-1)$.

Contoh 4.13. Hitunglah banyaknya bilangan bulat antara 1 dan 600, inklusif, yang bukan kelipatan 6.

Jawab. Banyaknya bilangan bulat antara 1 dan 600 yang merupakan kelipatan 6 ada 600/6 = 100 karena setiap bilangan bulat keenam adalah kelipatan 6. Jadi banyaknya bilangan bulat antara 1 dan 600 yang bukan kelipatan 6 ada sebanyak 600 – 100 = 500.

Aturan yang dapat digunakan untuk menghitung secara tidak langsung adalah sebagai berikut: Jika *A* adalah salah satu subset dari himpunan *S*, maka banyaknya objek di *A* sama dengan banyaknya objek di *S* dikurangi banyaknya objek yang tidak berada di *A*.

$$\overline{A}=S-A=\{x \mid x\in S, x\notin A\}$$

Himpunan tersebut merupakan komplemen *A* di *S*, yaitu himpunan yang meliputi objek-objek di *S* yang bukan merupakan anggota himpunan *A*.

$$|A|=|S|-|\overline{A}| \text{ atau } |\overline{A}|=|S|-|A|$$

Pernyataan tersebut di atas merupakan contoh yang paling sederhana dari prinsip inklusi-eksklusi.

Selanjutnya akan dirumuskan prinsip inklusi-eksklusi dalam konteks yang lebih mudah untuk dipahami. Sebagai langkah pertama dari aturan yang telah diketahui sebelumnya, misalkan *S* adalah suatu himpunan berhingga, yang masing-masing objek di dalamnya mungkin memiliki sifat $P_1 \text{ atau } P_2$ atau keduanya. Kita akan menentukan banyaknya objek di *S* yang tidak bersifat $P_1 \text{ atau } P_2$ atau tidak keduanya. Hal ini dapat dilakukan dengan menghitung semua objek di *S* kemudian dikurangi dengan semua objek yang bersifat P_1 dan semua objek yang bersifat P_2. Tetapi dengan langkah ini, objek-objek yang memiliki sifat P_1 yang juga bersifat P_2 telah dikurangkan sebanyak dua kali. Operasi ini dapat digambarkan secara simbolis sebagai berikut: Misalkan A_1 adalah subset dari *S* yang memiliki sifat P_1, dan A_2 adalah subset dari *S* yang memiliki sifat P_2. Dengan demikian dapat diketahui bahwa $\overline{A}_1$ merupakan objek-objek di *S* yang tidak bersifat P_1 dan $\overline{A}_2$ merupakan objek-objek di *S* yang tidak memiliki sifat P_2. Objek-objek yang tidak memiliki sifat P_1 maupun P_2 adalah objek yang merupakan anggota himpunan $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2$. Banyaknya objek dalam himpunan tersebut adalah

$$\left|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2\right| = |S| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2|. \tag{4.43}$$

Karena $\left|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2\right|$ menyatakan banyaknya objek di *S* yang tidak memiliki sifat P_1 maupun P_2, maka kebenaran persamaan di atas dapat ditunjukkan bahwa objek yang tidak memiliki sifat P_1 maupun P_2 akan memberikan kontribusi 1 terhadap ruas kanan, sedangkan objek-objek lainnya memberi kontribusi 0. Jika *x* adalah suatu objek yang tidak memiliki sifat P_1 dan P_2 maka objek tersebut termasuk objek-objek di *S,* tetapi tidak termasuk sebagai objek A_1 maupun A_2 dan juga tidak termasuk sebagai objek $A_1 \cap A_2$. Oleh karena itu, kontribusinya terhadap ruas kanan dari persamaan di atas adalah

$$1 - 0 - 0 + 0 = 1.$$

Jika *x* hanya memiliki sifat P_1 maka kontribusinya adalah

$$1 - 1 - 0 + 0 = 0$$

dan jika *x* hanya memiliki sifat P_2 maka kontribusinya adalah

$$1 - 0 - 1 + 0 = 0$$

Jika *x* memiliki sifat P_1 dan sekalgus memiliki sifat P_2 maka kontribusinya adalah

$$1 - 1 - 1 + 1 = 0.$$

Jadi, sisi kanan dari persamaan di atas juga meliputi objek-objek di *S* yang tidak memiliki sifat P_1 maupun P_2.

Secara umum, jika $P_1, P_2, \cdots, P_m$ adalah *m* sifat-sifat yang dimiliki oleh objek-objek yag ada di *S*, dan

$$A_i = \{x : x \in S, x \in P_i\}, \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

adalah objek-objek di *S* yang memiliki sifat P_i (dan mungkin memiliki sifat lainnya juga), maka $A_i \cap A_j$ adalah subset-subset dari objek-objek yang memiliki sifat-sifat P_i dan P_j (atau sifat yang lainnya), $A_i \cap A_j \cap A_k$ adalah subset dari objek-objek yang memiliki sifat-sifat $P_i, P_j,$ dan P_k, dan seterusnya. Subset dari objek-objek yang tidak memiliki salah satu sifat-sifat tersebut adalah $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_m$. Prinsip inklusi-eksklusi menggambarkan cara menghitung banyaknya objek di dalam subset tersebut dengan cara menghitung objek berdasarkan sifat-sifat yang dimilikinya. Dengan kata lain, prinsip inklusi-eksklusi adalah proses menghitung dengan cara "mundur".

Teorema 4.2. Banyaknya objek di dalam himpunan S yang tidak memenuhi sifat $P_1, P_2, \cdots, P_m$ dapat dinyatakan dengan

$$\begin{aligned} \left|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_m\right| &= |S| - \sum |A_i| + \sum \left|A_i \cap A_j\right| - \sum \left|A_i \cap A_j \cap A_k\right| \\ &\quad + \cdots + (-1)^m \left|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m\right| \end{aligned} \tag{4.44}$$

Dimana:

$\sum |A_i|$ adalah jumlah semua kombinasi-1 {*i*} dari $\{1, 2, \cdots, m\}$,

$\sum |A_i \cap A_j|$ adalah jumlah semua kombinasi-2 {*i,j*} dari $\{1, 2, \cdots, m\}$,

$\sum |A_i \cap A_j \cap A_k|$ adalah jumlah semua kombinasi-3 {*i,j,k*} dari $\{1, 2, \cdots, m\}$, dan seterusnya.

Jika *m* = 3, maka dari persamaan (4.7) diperoleh

$$\begin{aligned} \left|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3\right| &= |S| - \left(|A_1| + |A_2| + |A_3|\right) + \left(|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|\right) \\ &\quad - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa ada 1 + 3 + 3 + 1 = 8 suku di sebelah kanan.

Jika *m* = 4, maka persamaan (4.7) akan berbentuk:

$$\begin{aligned} \left|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4\right| &= |S| - \left(|A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4|\right) \\ &\quad + \left(|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4|\right) \\ &\quad + \left(|A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4|\right) \\ &\quad - \left(|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| \right. \\ &\quad \left. + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4|\right) \\ &\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|. \end{aligned}$$

Untuk kasus m = 4, dapat dilihat bahwa ada 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 suku di sebelah kanan.

Secara umum, banyaknya suku di sebelah kanan dari persamaan (4.7) adalah:

$$\binom{m}{0}+\binom{m}{1}+\binom{m}{2}+\cdots+\binom{m}{m}=2^m.$$

Bukti Teorema 4.2. Ruas kiri dari persamaan (4.7) menyatakan banyaknya objek di S yang tidak dibatasi oleh sifat-sifat tertentu. Kebenaran dari persamaan tersebut dapat dibuktikan dengan menyatakan bahwa suatu objek yang tidak dibatasi oleh sifat $P_1, P_2, \cdots, P_m$ memberikan kontribuasi 1 terhadap ruas kiri, sedangkan objek yang terikat pada setidak-tidaknya satu sifat tersebut akan memberikan kontribusi 0. Pertama, perhatikan suatu objek x yang tidak dibatasi oleh sifat tertentu. Kontribusinya terhadap ruas kanan dari persamaan (4.7) adalah

$$1 - 0 + 0 - 0 + \ldots + (-1)^m 0 = 1,$$

karena objek tersebut merupakan anggota S tetapi bukan merupakan anggota dari himpunan yang lainnya. Selanjutnya misalkan suatu objek y yang memiliki tepat $n \geq 1$ dari sifat-sifat di atas. Kontribusi y terhadap $|S|$ adalah $1=\binom{n}{0}$ Kontribusinya terhadap $\sum|A_i|$ adalah $n=\binom{n}{1}$ karena y memiliki tepat n sifat sehingga y merupakan anggota dari n himpunan-himpunan $A_1, A_2, \cdots, A_m$. Kontribusi y terhadap $\sum|A_i \cap A_j|$ adalah $\binom{n}{2}$ karena dapat dipilih sepasang sifat y dengan $\binom{n}{2}$ cara, oleh karena itu y merupakan anggota dari $\binom{n}{2}$ dari himpunan $A_i \cap A_j$. Kontribusi y terhadap $\sum|A_i \cap A_j \cap A_k|$ adalah $\binom{n}{3}$, dan seterusnya. Jadi total kontribusi y terhadap ruas kanan persamaan (4.7) adalah

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\cdots+(-1)^m\binom{n}{m},$$

yang sama dengan

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n},$$

karena kontribusi y terhadap ruas kiri persamaan (4.7) sama dengan 0 jika y memiliki setidak-tidaknya 1 sifat.

Contoh 4.14. Carilah banyaknya bilangan bulat antara 1 dan 1000 yang tidak dapat dibagi oleh 5, 6, dan 8.

Jawab. Untuk menyelesaikan soal ini, akan digunakan beberapa notasi. Untuk bilangan real *r,* notasi $\lfloor r \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang tidak lebih besar dari *r*. Faktor persekutuan terkecil antara dua bilangan bulat *a*, *b*, atau tiga bilangan bulat *a, b, c,* dengan notasi $\text{kpk}\{a,b\}$ dan $\text{kpk}\{a,b,c\}$. Misalkan P_1 adalah sifat yang menunjukkan bahwa suatu bilangan bulat yang dapat dibagi 5, P_2 adalah sifat yang menunjukkan bahwa suatu bilangan bulat yang dapat dibagi 6, dan P_3 adalah sifat yang menunjukkan bahwa suatu bilangan bulat yang dapat dibagi 8. Misalkan *S* adalah himpunan yang anggotanya terdiri atas 1000 bilangan bulat pertama. Untuk $i=1,2,3,$ ambil A_i adalah himpuna yang terdiri atas bilangan-bilangan bulat di *S* dengan sifat-sifat P_i. Akan ditentukan banyaknya bilangan bulat di dalam $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3$. Pertama-tama dapat diketahui bahwa

$$\begin{aligned} |A_1| &= \lfloor \tfrac{1000}{5} \rfloor = 200, \\ |A_2| &= \lfloor \tfrac{1000}{6} \rfloor = 166, \\ |A_3| &= \lfloor \tfrac{1000}{8} \rfloor = 125. \end{aligned}$$

Bilangan-bilangan bulat di dalam himpunan $A_1 \cap A_2$ dapat dibagi oleh 5 dan 6. Tetapi suatu bilangan bulat dikatakan dapat dibagi oleh 5 dan 6 jika dan hanya jika bilang bulat tersebut dapat dibagi oleh $\text{kpk}(5,6)$. Karena $\text{kpk}(5,6)=30$, $\text{kpk}(5,8)=40$, dan $\text{kpk}(6,8)=24$, maka

$$\begin{aligned} |A_1 \cap A_2| &= \lfloor \tfrac{1000}{30} \rfloor = 33, \\ |A_1 \cap A_3| &= \lfloor \tfrac{1000}{40} \rfloor = 25, \\ |A_2 \cap A_3| &= \lfloor \tfrac{1000}{24} \rfloor = 41 \end{aligned}$$

Karena $\text{kpk}(5,6,8)=120,$ maka dapat disimpulkan bahwa

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \lfloor \tfrac{1000}{128} \rfloor = 8.$$

Jadi berdasarkan prinsip inklusi-eksklusi, banaknya bilangan bulat antara 1 dan 1000 yang tidak dapat dibagi dengan 5,6, dan 8 ada sebanyak

$$\left|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3\right| = 1000-(200+166+125)+(33+25+41)-8=600$$

Pada contoh-contoh berikut ini ditunjukkan penerapan prinsip inklusi-eksklusi dalam masalah-masalah yang lebih umum. Misalkan bahwa ukuran dari himpunan $A_{i1} \cap A_{i2} \cap \cdots \cap A_{ik}$ yang dijumpai di dalam prinsip inklusi-eksklusi ditentukan oleh *k* saja, bukan oleh himpunan *k* yang digunakan di dalam irisan. Jadi, terdapat konstanta-konstanta $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ sedemikian sehingga

$$\begin{aligned}
&\alpha_0 = |S| \\
&\alpha_1 = |A_1| = |A_2| = \cdots = |A_m| \\
&\alpha_2 = |A_1 \cap A_2| = |A_2 \cap A_3| = \cdots = |A_{m-1} \cap A_m| \\
&\alpha_3 = |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \cdots = |A_{m-2} \cap A_{m-1} \cap A_m| \\
&\vdots \\
&\alpha_m = |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m|
\end{aligned}$$

Dalam kasus ini, prinsip inklusi-eksklusi dapat disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned}
|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_m| = \alpha_0 - \binom{m}{1}\alpha_1 + \binom{m}{2}\alpha_2 - \binom{m}{3}\alpha_3 + \cdots + \\
(-1)^k \binom{m}{k}\alpha_k + \cdots + (-1)^m \alpha_m.
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Hal ini disebabkan karena jumlahan ke-*k* di dalam prinsip inklusi-eksklusi mengandung $\binom{m}{k}$ suku penjumlahan, yang masing-masing sama dengan α_k.

Contoh 4.15: Ada berapa banyak bilangan bulat antara 0 dan 99.999 yang mengandung angka-angka 2, 5, dan 8?

Jawab. Misalkan *S* adalah himpunan bilangan bulat antara 0 dan 99.999. Setiap bilangan bulat tersebut terdiri atas angka 5 digit, termasuk angka-angka 0 di depannya. Jadi bilangan bulat di *S* dapat dipandang sebagai permutasi-5 dari multiset dimana masing-masing angka 0, 1, 2, 3, . . ., 9 memiliki perulangan angka 5 atau lebih. Misalkan P_1 adalah sifat dimana suatu bilangan bulat (antara 0 dan 99.999) tidak mengandung angka 2, P_2 adalah sifat dimana suatu bilangan bulat tidak mengandung angka 5, dan P_3 adalah sifat dimana suatu bilangan bulat tidak mengandung angka 8. Untuk $i = 1, 2, 3,$ misalkan A_i adalah himpunan yang terdiri atas bilangan-bilangan bulat di *S* yang memiliki sifat P_i. Dalam contoh ini akan ditentukan banyaknya bilangan bulat yang terdapat di $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3.$ dengan menggunakan notasi dari contoh sebelumnya, diperoleh

$$\alpha_0 = 10^5, \alpha_1 = 9^5, \alpha_2 = 8^5, \alpha_3 = 7^5.$$

Sebagai contoh untuk mengetahui banyaknya bilangan bulat antara 0 dan 99.999 yang tidak mengandung angka 2 dan angka 5, maka $|A_1 \cap A_2|$ sama dengan banyaknya permutasi-5 dari multiset

$$\{5.0,\ 5.1, 5.3, 5.4, 5.6, 5.7, 5.8, 5.9\},$$

yang banyaknya sama dengan 8^5. Jadi bilangan bulat antara 0 dan 99.999 yang mengandung angka-angka 2, 5, dan 8 ada sebanyak

$$10^5 - 3x9^5 + 3x8^5 - 7^5.$$

Contoh 4.16: Hitunglah ada berapa banyak permutasi dari huruf-huruf

M-A-T-H-I-S-F-U-N

sedemikian sehingga huruf-huruf dalam kata MATH, IS, dan FUN tidak berurutan (misalnya, permutasi MATHISFUN tidak diperbolehkan, demikian juga INUMATHSF dan ISMATHFUN).

Jawab. Untuk menghitung permutasi tersebut di atas, digunakan prinsip inklusi-eksklusi. Pertama-tama, ditetapkan suatu himpunan *S* sebagai himpunan semua permutasi dari 9 huruf yang diberikan. Selanjutnya dimisalkan P_1 adalah sifat permutasi di *S* yang mengandung kata MATH, P_2 adalah sifat permutasi di *S* yang mengandung kata IS, dan P_3 adalah sifat permutasi di *S* yang mengandung kata FUN, masing-masing dengan huruf-huruf yang berurutan. Untuk $i = 1, 2, 3,$ A_i adalah himpunan permutasi-permutasi di *S* yang memenuhi sifat P_1. Akan ditentukan banyaknya permutasi di $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3$.

Dengan demikian $|S| = 9! = 362.880$. Permutasi di A_1 dapat dipandang sebagai permutasi dari 6 simbol MATH-I-S-F-U-N. Jadi, $|A_1| = 6! = 720$. Dengan cara yang sama, permutasi A_2 adalah permutasi dari 8 simbol M-A-T-H-IS-F-U-N, yaitu $|A_2| = 8! = 40.320,$ dan permutasi A_3 adalah permutasi dari 7 simbol M-A-T-H-I-S-FUN, yaitu $|A_3| = 7! = 5040.$

Permutasi di dalam $A_1 \cap A_2$ adalah permutasi dari 5 simbol MATH-IS-F-U-N, Permutasi di dalam $A_1 \cap A_3$ adalah permutasi dari 4 simbol MATH-I-S-FUN, dan permutasi di dalam $A_2 \cap A_3$ adalah permutasi dari 6 simbol M-A-T-H-IS-FUN. Dengan demikian, $|A_1 \cap A_2| = 5! = 120, |A_1 \cap A_3| = 4! = 24,$ dan $|A_2 \cap A_3| = 6! = 720.$ Akhirnya, $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ terdiri atas permutasi dari 3 simbol MATH-IS-FUN, yaitu $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3! = 6.$ Dengan mensubtitusikan semua nilai-nilai yang telah diperoleh sebelumnya,

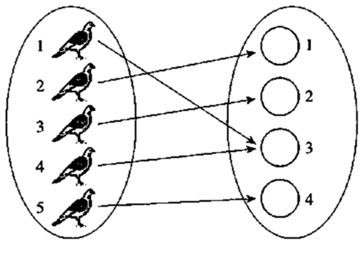
$$\begin{aligned}|A_1 \cap A_2 \cap A_3| &= 362.880 - 720 - 40.320 - 5040 \\ &\quad + 120 + 24 + 720 - 6 = 317.658.\end{aligned}$$

D. Prinsip Sarang Merpati

Tahukah anda bahwa setidak-tidaknya dua orang penduduk Kota Makassar memiliki jumlah helai rambut yang tepat sama di kepala mereka? Mungkin anda akan bertanya, bagaimana mengetahui hal tersebut? Untuk menjawab pertanyaan ini maka kita harus menghitung jumlah helai rambut di kepala dari setiap penduduk Kota Makassar. Bagaimana? Sangat sederhana: sedikit pengetahuan biologi, statistik, dan matematika:

- Menurut ilmu biologi, jumlah helai rambut di kepala seorang manusia kurang dari 200.000.
- Jumlah penduduk Kota Makassar lebih dari 9.000.000 jiwa.
- Misalkan dikumpulkan 200.000 penduduk Kota Makassar yang mempunyai jumlah helai rambut berbeda di kepalanya masing-masing. Karena jumlah helai rambut tidak lebih dari 200.000, maka orang yang ke-200.001 memiliki jumlah rambut yang sama dengan salah satu dari 200.000 orang tadi.

Prinsip sarang merpati menyatakan bahwa jika *n* merpati menempati *m* sarang dan *n* > *m* sarang, maka setidak-tidaknya satu sarang akan ditempati lebih dari dua merpati. Prinsip ini diilustrasikan pada Gambar 4.6 dengan *n* = 5 dan *m* = 4. Gambar (a) menujukkan merpati yang menempati sarang, dan (b) menunjukkan korespondensi setiap merpati dengan sarang. Prinsip sarang merpati sering dinamakan prinsip kotak Dirichlet karena prinsip tersebut pertama kali dikemukakan oleh J.P.G.L. Dirichlet (1805-1859).



Gambar 4.6. Sarang merpati dengan *n* = 5 dan *m* = 4

Fungsi dari suatu himpunan berhingga dengan himpunan berhingga lainnya yang lebih kecil, tidak dapat berelasi satu-satu, karena pasti ada setidak-tidaknya dua elemen di dalam domain yang memiliki peta yang sama di kodomain.

Gambar 4.7. Sarang Merpati

Foto: http://camp.bardmathcircle.org/2015/08/day-3.html

D.1. Prinsip Sarang Merpati Bentuk Pertama

Prinsip sarang merpati bentuk pertama atau sering dinamakan bentuk sederhana adalah sebagai berikut:

Jika $(n+1)$ *atau lebih obyek ditempatkan ke dalam n kotak, maka terdapat paling sedikit satu kotak yang memuat dua atau lebih obyek tersebut.*

Bukti: Misalkan jika *n* merpati ditempatkan ke dalam *m* sarang, dimana $n > m$, maka akan terdapat sarang yang memuat paling sedikit dua merpati. Pernyataan Prinsip Pigeonhole ini dapat dibuktikan dengan kontradiksi. Andaikan bahwa setiap sarang memuat paling banyak satu merpati. Karena ada *m* sarang, maka paling banyak *m* merpati yang bisa termuat. Padahal diketahui ada *n* merpati yang tersedia dan $n > m$, sehingga kita dapatkan sebuah kontradiksi. Oleh karena itu, jika $(n+1)$ atau lebih merpati ditempatkan ke dalam *n* sarang, maka haruslah terdapat paling sedikit satu sarang yang memuat dua atau lebih burung merpati.

Bentuk sederhana dari prinsip sarang merpati dinyatakan pada Teorema 4.3 sebagai berikut:

Teorema 4.3. Jika $n+1$ objek dimasukkan ke dalam n kotak, maka setidak-tidaknya satu kotak memuat dua atau lebih objek.

Bukti. Jika masing-masing ke-n kotak memuat paling banyak satu objek, maka total objek yang dapat dimasukkan ke dalam kotak paling banyak satu objek. Karena ada $n+1$ objek yang harus dimasukkan ke dalam kotak, maka haruslah terdapat setidak-tidaknya satu kotak yang memuat dua atau beberapa objek.

Penerapan 1. Dari 13 orang mahasiswa yang tergabung di dalam satu kelompok, setidak-tidaknya dua orang di antaranya lahir pada bulan yang sama.

Penerapan 2. Suatu pesta dihadiri oleh n pasangan suami-istri. Berapa orang yang harus dipilih dari $2n$ orang untuk memastikan bahwa sepasang suami-istri terdapat di dalamnya?

Jika dipilih n orang, maka ada kemungkinan bahwa yang terpilih adalah suaminya saja, atau istrinya saja. Artinya belum dapat dipastikan bahwa terdapat sepasang suami istri yang terpilih dari n orang tersebut. Tetapi jika dipilih $n + 1$ orang, maka dapat dipastikan bahwa meskipun istrinya saja atau suaminya saja yang terpilih dari n orang pertama, pastilah terdapat setidak-tidaknya satu pasang suami istri yang terpilih dari $n + 1$ orang.

Beberapa prinsip yang berhubungan dengan prinsip sarang merpati perlu untuk disebutkan, antara lain:

- Jika n objek dimasukkan ke dalam n kotak dan tidak ada kotak yang kosong, maka setiap kotak berisi dengan tepat satu objek.
- Jika n objek dimasukkan ke dalam n kotak dan tidak ada kotak yang berisi lebih dari satu objek, maka masing-masing kotak berisi satu objek.

Merujuk pada Penerapan 2, jika dipilih n orang sedemikian sehingga terpilih setidak-tidaknya satu orang dari setiap pasangan suami-istri, maka dapat dipastikan telah terpilih dengan tepat satu orang dari setiap pasangan. Demikian juga, jika dipilih n orang sedemikian sehingga terpilih paling banyak satu orang dari setiap pasangan, maka dapat dipastikan telah terpilih setidak-tidaknya satu orang dari setiap pasangan tersebut.

Formulasi yang lebih abstrak dapat dinyatakan sebagai suatu fungsi pemetaan sebagai berikut: Misalkan *X* dan *Y* adalah himpunan berhingga dan $f : X \to Y$ adalah fungsi dari *X* ke *Y*.

- Jika banyaknya elemen di *X* lebih banyak dari banyaknya elemen di *Y*, maka *f* bukan fungsi satu-satu.
- Jika banyaknya elemen di *X* sama dengan banyaknya elemen di *Y*, dan *f* adalah fungsi yang *onto,* maka *f* adalah fungsi satu-satu.
- Jika banyaknya elemen di *X* sama dengan banyaknya elemen di *Y*, dan *f* bersifat satu-satu, maka *f* adalah fungsi yang *onto.*

Penerapan 3. Jika diberikan *m* bilangan bulat $a_1, a_2, \cdots, a_m$, maka terdapat bilangan bulat *m* dan *l* dengan $0 \le k \le l \le m$ sedemikian sehingga $a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_l$ dapat dibagi oleh *m*.

Untuk membuktikan hal ini, perhatikan jumlahan *m* suku-suku sebagai berikut:

$$a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \cdots, a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_m.$$

Jika salah satu suku tersebut dapat dibagi *m*, maka pernyataan di atas berlaku. Jadi dapat diandaikan bahwa setiap jumlahan tersebut di atas memiliki sisa hasil bagi bukan nol jika dibagi dengan *m*, sehingga salah satu sisa hasil baginya sama dengan salah satu dari $1, 2, 3, \cdots, m-1$. Karena ada *m* suku dan hanya *m* – 1 sisa, maka dua dari suku jumlahan tersebut memiliki sisa hasil bagi yang sama jika dibagi dengan *m*. Oleh karena itu, terdapat bilangan-bilangan bulat *k* dan *l* dengan *k* < *l* sedemikian sehingga $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k$ dan $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_l$ memiliki sisa hasil bagi yang sama jika dibagi dengan *m*:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k = bm + r,$$

dan

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_l = cm + r.$$

Dengan memperkurangkan persamaan kedua terhadap persamaan pertama, dapat dilihat bahwa $a_{k+1} + \cdots + a_l = (c-b)m$; sehingga $a_{k+1} + \cdots + a_l$ dapat dibagi *m*.

Misalkan *m* = 7 dan bilangan-bilangan bulat $2, 4, 6, 3, 5, 5,$ dan $6.$ Dengan perhitungan seperti di atas, diperoleh $2, 6, 12, 15, 20, 25,$ dan 31 yang jika dibagi 7 masing-masing memiliki hasil bagi $2, 6, 5, 1, 6, 4,$ dan $3.$ Terlihat bahwa ada dua sisa pembagian yang sama dengan 6. Hal ini membuktikan bahwa 6 + 3 + 5 = 14 dapat dibagi 7.

Penerapan 4. Seorang master catur melakukan latihan persiapan selama 11 minggu untuk mngikuti suatu pertandingan. Dia memutuskan untuk berlatih setidak-tidaknya satu game per hari. Untuk menghindari kelelahan fisik sebelum bertanding, dia membatasi agar tidak berlatih lebih dari 12 game dalam waktu satu minggu. Tunjukkan bahwa terdapat rentangan waktu yang berturut-turut sedemikian sehingga master catur tersebut berlatih tepat 21 kali game.

Penyelesaian. Misalkan a_1 adalah banyaknya game yang dimainkan pada hari pertama, a_2 adalah banyaknya game yang dimainkan pada hari pertama dan kedua, a_3 adalah banyaknya game yang dimainkan pada hari pertama, kedua, dan ketiga, dan seterusnya. Barisan bilangan $a_1, a_2, \cdots, a_{77}$ menunjukkan bilangan yang semakin besar, karena game yang dilatih setidak-tidaknya satu game per hari. Kemudian, $a_1 \geq 1$ karena dalam satu minggu paling banyak berlatih 12 game, dan $a_{77} \leq 12 \text{x} 11 = 132.$ Dengan demikian,

$$1 \leq a_1 < a_2 < a_3 \cdots < a_{77} \leq 132.$$

Barisan $a_1 + 21, a_2 + 21, a_3 + 21, \cdots, a_{77} + 21$ juga merupakan barisan yang semakin bertambah besar yaitu

$$22 \leq a_1 + 21 < a_2 + 21 < \cdots < a_{77} + 21 \leq 132 + 21 = 153.$$

Jadi masing-masing ke-154 bilangan

$$a_1, a_2, \cdots, a_{77}, a_1 + 21, a_2 + 21, \cdots, a_{77} + 21$$

merupakan bilangan-bilangan bulat yang terletak antara 1 dan 153. Dua di antaranya adalah bilangan yang sama. Tetapi karena tidak terdapat dua dari bilangan $a_1, a_2, \cdots, a_{77}$ yang sama, demikian juga $a_1 + 21, a_2 + 21, \cdots, a_{77} + 21$ maka haruslah ada i dan *j* sedemikian sehingga $a_i = a_j + 21.$ Dengan demikian, pada hari $j+1, j+2, j+3, \cdots, i,$ master catur tersebut berlatih sebanyak 21 game tepat.

Penerapan 5a. Dari bilangan-bilangan bulat 1,2,3,…,200, dipilih 101 bilangan bulat. Tunjukkan bahwa di antara bilangan-bilangan bulat yang dipilih tersebut, setidak-tidaknya satu bilangan yang merupakan kelipatan 2.

Penyelesaian: Bilangan bulat 1,2,3,…,200, terdiri atas 200 bilangan. Jika dipilih 100 bilangan bulat dari ke-200 bilangan tersebut, maka salah satu kemungkinan yang terpilih adalah bilangan ganjil semua, yaitu 1,3,5, … ,199, dan tidak satupun bilangan ganjil tersebut yang merupakan kelipatan 2. Tetapi jika dipilih 101 bilangan bulat, maka dipastikan setidak-tidaknya salah satunya adalah bilangan genap (kelipatan 2) bahkan jika 100 bilangan lainnya adalah bilangan ganjil.

Penerapan 5b. Dari bilangan-bilangan bulat 1,2,3,…,200, dipilih 101 bilangan bulat. Tunjukkan bahwa di antara bilangan-bilangan bulat yang dipilih tersebut, terdapat dua bilangan di antaranya sedemikian sehingga bilangan yang satu dapat dibagi oleh bilangan yang lainnya.

Penyelesaian: Dengan memfaktorkan bilangan 2 sebanyak mungkin dari semua bilangan 1,2,3,…,200, dapat diketahui bahwa sebarang bilangan bulat dapat dinyatakan dalam bentuk $2^k xa$ dengan $k \geq 0$ dan a adalah bilangan ganjil. Untuk bilangan bulat antara 1 dan 200, *a* merupakan salah satu dari 100 bilangan 1,3,5,…,199. Jadi dengan memilih 101 bilangan, maka dapat dipastika terdapat dua bilangan yang memiliki nilai *a* yang sama. Misalkanlah kedua bilangan tersebut adalah $2^r xa$ dan $2^s xa$. Jika $r > s$ maka $2^r xa$ dapat dibagi oleh $2^s xa$. Jika $s > r$ maka $2^s xa$ dapat dibagi oleh $2^r xa$.

Dari teori bilangan, telah diketahui bahwa dua bilangan bulat positif *m* dan *n* dikatakan prima relatif jika faktor persekutuan terbesar dari kedua bilangan tersebut adalah 1. Dengan demikian, diketahui bahwa 12 dan 35 merupakan prima relatif satu sama lain, tetapi 12 dan 15 bukan prima relatif karena $3 \neq 1$ merupakan faktor persekutuan terbesar dari kedua bilangan itu.

Penerapan 6. Teorema Sisa Cina. Misalkan *m* dan *n* adalah dua bilangan prima relatif dengan lainnya. Misalkan juga *a* dan *b* adalah bilangan-bilangan bulat dimana $0 \leq a \leq m-1$ dan Dengan batasan-batasan tersebut, terdapat suatu bilangan bulat positif *x* sedemikian sehingga sisa hasil bagi dari *x*/*m* adalah *a*, dan sisa jika *x*/*n* adalah *b*. Dengan kata lain, *x* dapat dinyatakan dalam bentuk $x = pm + a$ dan juga dalam bentuk untuk suatu bilangan bulat *p* dan *q*.

Pembuktian teorema ini dapat ditujukkan dengan *n* bilangan bulat sebagai berikut:

$$a, m+a, 2m+a, \cdots, (n-1)m+a.$$

Masing-masing bilangan bulat ini menghasilkan *a* jika dibagi dengan *m*. Anggap ada dua di antaranya yang memiliki sisa hasil yang sama, *r*, jika dibagi dengan *n*. Misalkan kedua bilangan tersebut adalah *im* + *a* dan *jm* + *a,* dengan $0 \le i \le j \le n-1$. Jadi terdapat bilangan-bilangan bulat q_i dan q_j sedemikian sehingga

$$im + a = q_i n + r$$

dan

$$jm + a = q_j n + r.$$

Dengan memperkurangkan persamaan pertama dari persamaan kedua, diperoleh

$$(j-i)m = (q_j - q_i)n.$$

Hal ini menunjukkan bahwa *n* adalah faktor dari bilangan $(j-i)m$. Karena *n* tidak memiliki faktor persekutuan lain dengan *m* selain faktor 1, maka dengan sendirinya *n* adalah faktor dari *j* – *i.* Meskipun demikian, $0 \le i \le j \le n-1$ menunjukkan bahwa $0 < j-i \le n-1$ dan oleh karena itu *n* tidak mungkin merupakan faktor dari *j* – *i.* Terdapat kontradiksi dalam pernyataan di atas, karena diandaikan bahwa dua dari bilangan-bilangan

$$a, m+a, 2m+a, \cdots, (n-1)m+a$$

akan memiliki sisa yang sama jika dibagi dengan *n*. Kesimpulannya adalah bahwa setiap bilangan tersebut di atas memiliki sisa hasil bagi yang berbeda jika dibagi dengan *n*. Berdasarkan prinsip sarang merpati, masing-masing bilangan $0, 1, 2, \ldots, n-1$ akan muncul sebagai sisa pembagian. Jika *p* adalah bilangan bulat dengan $0 \le p \le n-1$ sehingga bilangan $x = pm + a$ memiliki sisa *b* jika dibagi dengan *n* maka untuk beberapa *q*,

$$x = qn + b. \tag{4.46}$$

Jadi, $x = pm + a$ dan $x = qn + b$, dan *x* memiliki sifat seperti yang telah disebutkan di atas.

Sebagai latihan, mahasiswa dapat membuktikan bahwa suatu bilangan rasional a/b memiliki ekspansi desimal yang berulang sebagai konsekuensi dari prinsip sarang merpati.

Contoh 4.17: Penerapan prinsip sarang merpati.

a. Apakah dalam kelompok yang terdiri atas 6 orang, dapat dipastikan terdapat setidak-tidaknya dua orang yang lahir pada bulan yang sama? Dalam kelompok yang terdiri atas 13 orang, apakah pasti terdapat setidak-tidaknya dua orang yang lahir pada bulan yang sama? Mengapa?

b. Apakah di antara semua penduduk Indonesia, dapat dipastikan terdapat setidak-tidaknya dua orang yang jumlah helai rambut di kepalanya tepat sama? Mengapa?

Jawab. Tidak dapat dipastikan bahwa dalam kelompok yang terdiri atas 6 orang terdapat setidak-tidaknya dua orang di antaranya yang lahir pada bulan yang sama. Misalkan saja, bahwa keenam orang tersebut lahir pada bulan yang berbeda, yaitu bulan Januari sampai Juni.

Tetapi jika dalam kelompok yang terdiri atas 13 orang, maka dapat dipastikan bahwa setidak-tidaknya terdapat dua orang di antaranya yang lahir pada bulan yang sama. Hal ini disebabkan karena hanya ada 12 kemungkinan bulan kelahiran seseorang, sedangkan dalam kelompok tersebut terdapat 13 orang. Karena 13 > 12 maka dipastikan terdapat setidak-tidaknya dua orang yang lahir pada bulan yang sama.

b. Mahasiswa dapat menjelaskan masalah tersebut sesuai dengan contoh yang telah diberikan sebelumnya.

Contoh 4.18. Jumlah yang harus diambil untuk memastikan hasil. Di dalam lemari tersimpan 2 pasang kaos kaki hitam dan 2 pasang kaos kaki putih. Jika seseorang mengambil beberapa kaos tersebut tanpa melihatnya lebih dulu, berapakah jumlah minimal kaos kaki yang harus diambil agar dapat dipastikan bahwa setidak-tidaknya satu pasang kaos kaki terambil dari lemari?

Jawab. Diketahui bahwa di dalam lemari terdapat 4 kaos kaki yang berwarna hitam dan 4 yang berwarna putih. Jika diambil empat kaos kaki, terdapat salah satu kemungkinan bahwa yang terambil adalah dua kaos kaki hitam sebelah kiri dan dua kaos kaki putih sebelah kiri. Jika diambil lima kaos kaki, maka dipastikan bahwa warna kaos tersebut pasti berpasangan dengan salah satu dari kaos kaki yang telah diambil sebelumnya. Jadi jumlah minimal yang harus diambil adalah sekurang-kurangnya lima kaos kaki.

D.2. Prinsip Sarang Merpati Bentuk Kedua

Jika f merupakan sebuah fungsi dari suatu himpunan berhingga X ke suatu himpunan berhingga Y dan $|X| > |Y|$ *maka* $f(x_1) = f(x_2)$ *untuk beberapa* $x_1, x_2 \in X$ *dimana* $x_1 \neq x_2$.

Bukti: Asumsikan *X* sebagai himpunan merpati dan *Y* sebagai himpunan sarang merpati. Selanjutkan merpati *x* akan dipasangkan dengan sarang merpati $f(x)$. Karena jumlah merpati lebih banyak dari pada sarangnya, maka terdapat paling sedikit dua merpati, $x_1, x_2 \in X$ yang dipasangkan dengan sarang yang sama, yaitu $f(x_1) = f(x_2)$ untuk beberapa $x_1, x_2 \in X$, dengan $x_1 \neq x_2$. Kasus khusus dari prinsip sarang merpati dinyatakan dalam Teorema 4.4.

Teorema 4.4. Misalkan $q_1, q_2, q_3, \cdots, q_n$ adalah bilangan-bilangan bulat positif. Jika $q_1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_n - n - 1$ objek dimasukkan ke dalam *n* kotak, maka kemungkinan kotak pertama berisi setidak-tidaknya q_1 objek, atau kotak kedua berisi setidak-tidaknya q_2 objek, $\cdots$, atau kotak ke-*n* berisi setidak-tidaknya q_n objek.

Bukti. Misalkan akan didistribusikan $q_1 + q_2 + \cdots + q_n - n + 1$ objek ke dalam *n* kotak. Jika untuk setiap $i = 1, 2, 3, \cdots, n$ kotak $ke - i$ berisi kurang dari q_i objek, maka total banyaknya objek di dalam semua kotak tidak akan lebih dari

$$(q_1 - 1) + (q_2 - 1) + \cdots + (q_n - 1) = q_1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_n - n.$$

Karena jumlah ini kurang satu dari pada jumlah objek yang didistribusikan, maka dapat disimpulkan bahwa untuk beberapa $i = 1, 2, 3, \cdots, n$ kotak $ke - i$ berisi setidak-tidaknya q_i objek.

Perhatikan bahwa $q_1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_n - n$ objek dapat didistribusikan ke dalam *n* kotak dengan cara tertentu sehingga tidak terdapat $i = 1, 2, 3, \cdots, n$ yang memungkinkan kotak $ke - i$ berisi q_i atau lebih objek. Hal ini dilakukan dengan memasukkan $q_1 - 1$ objek ke dalam kotak pertama, $q_2 - 1$ objek ke dalam kotak kedua, dan seterusnya.

Bentuk sederhana prinsip sarang merpati diperoleh dari bentuk kuat dengan memilih $q_1 = q_2 = q_3 = \cdots = q_n = 2$ sehingga

$$q_1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_n - n + 1 = 2n - n + 1 = n + 1.$$

Bentuk kuat dari prinsip sarang merpati pada umumnya dapat diterapkan dalam kasus khusus apabila semua $q_1, q_2, q_3, \cdots, q_n$ memiliki nilai yang sama dengan suatu bilangan bulat tertentu, misalnya *r*. Pada kasus ini, prinsip sarang merpati dijabarkan sebagai berikut:

- Jika $n(r-1)+1$ objek dimasukkan ke dalam *n* kotak, maka setidak-tidaknya ada satu kotak yang berisi *r* atau lebih objek. Atau,
- Jika rata-rata dari *n* bilangan bulat non-negatif $m_1, m_2, m_3, \cdots, m_n$ lebih besar dari $r-1$, yaitu

$$\frac{m_1+m_2+m_3+\cdots+m_n}{n} > r-1,$$

maka setidak-tidaknya satu dari bilangan tersebut lebih besar atau sama dengan *r*.

Hubungan antara kedua rumusan tersebut di atas diperoleh dengan memilih $n(r-1)+1$ objek kemudian memasukkannya ke dalam *n* kotak. Misalkan m_i adalah banyaknya objek yang ada di dalam kotak $ke-i$ untuk $i = 1, 2, 3, \cdots, n$, maka rata-rata dari bilangan $m_1, m_2, m_3, \cdots, m_n$ adalah

$$\frac{m_1+m_2+m_3+\cdots+m_n}{n} = \frac{n(r-1)+1}{n} = (r-1)+\frac{1}{n}.$$

Karena nilai rata-rata ini lebih besar dari $r-1$ maka salah satu dari bilangan bulat m_i bernilai setidak-tidaknya sama dengan *r*. Dengan kata lain, salah satu dari kotak berisi setidak-tidaknya *r* objek.

Prinsip nilai rata-rata dapat juga dinyataka dalam bnetuk lain sebagai berikut:

- Jika nilai rata-rata dari *n* bilangan bulat non-negatif $m_1, m_2, m_3, \cdots, m_n$ kurang dari $r+1$, yaitu

$$\frac{m_1+m_2+m_3+\cdots+m_n}{n} < r+1,$$

maka setidak-tidaknya ada salah satu bilangan bulat tersebut yang bernilai kurang dari $r+1$.
- Jika nilai rata-rata dari *n* bilangan bulat non-negatif $m_1, m_2, m_3, \cdots, m_n$ setidak-tidaknya bernilai sama dengan *r*, maka setidak-tidaknya salah satu dari bilangan bulat tersebut bernilai sekurang-kurangnya sama dengan *r*.

Penerapan 7. Suatu keranjang akan diisi dengan buah apel, pisang, dan jeruk. Berapakah jumlah paling sedikit buah yang harus dimasukkan ke dalam keranjang agar dapat dipastikan bahwa keranjang tersebut berisi setidak-tidaknya 8 apel atau setidak-tidaknya 6 pisang, atau setidak-tidaknya 9 jeruk?

Berdasarkan pemahaman kita tentang bentuk kuat prinsip sarang merpati, maka dapat diketahui bahwa $8+6+9-3+1=21$ buah yang dimasukkan ke dalam keranjang, buah manapun yang dipilih, akan menjamin bahwa keranjang tersebut akan berisi buah sesuai dengan syarat yang diberikan. Jika dimasukkan 7 apel, 5 pisang, dan 8 jeruk maka syarat tersebut di atas tidak dapat terpenuhi.

Penerapan 8. Dua piringan yang ukurannya berbeda, masing-masing dibagi menjadi 200 sektor yang kongruen. Pada piringan yang lebih besar, 100 sektor di antaranya dipilih secara bebas kemudian diwarnai dengan warna merah; 100 sektor lainnya diberi warna biru. Pada piringan yang lebih kecil, masing-masing sektor diberi warna merah dan biru tetapi belum diketahui berapa sektor yang berwarna merah dan biru. Piringan kecil diletakkan di atas piringan besar sedemikian sehingga titik pusatnya berimpit. Tunjukkan bahwa kedua piringan dapat disusun sedemikian sehingga setidak-tidaknya terdapat 100 sektor yang berimpit pada piringan kecil memiliki warna yang sama dengan piringan besar.

Untuk membuktikan hal ini, andaikan bahwa jika piringan besar tidak berubah posisinya, maka ada 200 kemungkinan posisi dari piringan kecil sedemikian sehingga masing-masing sektornya berimpit dengan salah satu sektor pada piringan besar. Karena piringan besar memiliki 100 sektor yang berwarna merah dan biru, maka masing-masing sektor pada piringan kecil akan memiliki warna yang sama dengan piringan besar sebanyak 100 dari 200 kemungkinan posisi. Jadi banyaknya posisi sektor piringan kecil dengan warna yang bersesuaian piringan besar adalah jumlah sektor piringan kecil dikali 100, yaitu sebanyak 20.000. Oleh karena itu rata-rata banyaknya kecocokan warna untuk setiap posisi piringan kecil adalah 20.000/200 = 100. Dengan kata lain ada salah satu dari 20.000 posisi tersebut sehingga 100 sektor yang berimpit dari kedua piringan memiliki warna yang sama (merah maupun biru).

Contoh 4.19. Sebanyak 370 mahasiswa memprogramkan mata kuliah tertentu. Tunjukkan bahwa setidak-tidaknya dua di antara mahasiswa tersebut lahir pada hari, tanggal, bulan, dan tahun yang sama.

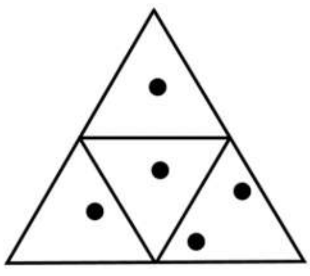
Jawab. Misalkan *M* adalah himpunan mahasiswa dan *T* adalah banyaknya hari dalam satu tahun. Karena diketahui bahwa $|\mathrm{M}| = 370 > 366 = |\mathrm{T}|$, maka menurut prinsip sarang merpati, suatu fungsi dari *M* ke *T* akan menunjukkan adanya setidak-tidaknya dua elemen *M* yang merupakan elemen dari *T* yang sama.

Contoh 4.20. Buktikan bahwa untuk setiap bilangan bulat positif *n*, terdapat setidak-tidaknya dua dari *n* + 1 bilangan $m_1, m_2, \cdots, m_{n+1}$ yang selisihnya merupakan kelipatan *n*.

Bukti: Misalkan $P = \{m_1, m_2, \cdots, m_{n+1}\}$ dan *H* adalah *n* sisa modulo yang mungkin, yaitu $\{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$. Prinsip sarang merpati menyatakan bahwa setidak-tidaknya dua bilangan memiliki sisa pembagian modulo *n* dan oleh karena itu *n* dapat membagi selisih kedua bilangan tersebut.

Contoh 4.21. Lima butir kelereng diletakkan di dalam suatu segitiga sama sisi yang panjang sisinya adalah 1 satuan. Tunjukkan bahwa setidak-tidaknya dua kelereng di antaranya berjarak tidak lebih dari 0,5 satuan.

Jawab. Jika segitiga tersebut dibagi menjadi empat segitiga sama sisi yang sama besar, maka panjang setiap sisi segitiga tersebut adalah 0,5 satuan. Selanjutnya karena ada lima kelereng dan akan ditempatkan ke dalam empat segitiga yang lebih kecil, maka setidak-tidaknya dua kelereng pasti berada di dalam segitiga yang sama. Karena diketahui bahwa jarak maksimum antara titik-titik dalam satu segitiga kecil adalah 0,5, maka setidak-tidaknya dua kelereng berjarak paling jauh 0,5 satu dengan yang lainnya.



Contoh 4.22. Tunjukkan bahwa dalam satu kelas yang terdiri dari 61 orang mahasiswa, setidak-tidaknya terdapat 6 orang yang lahir pada bulan yang sama.

Jawab. Misalkan *M* adalah himpunan mahasiswa dan *B* adalah himpunan bulan kelahiran mahasiswa tersebut. Karena $|M| = 61 \geq 12x5 = 60 = 5x|B|$, maka dapat dipastikan setidak-tidaknya 6 orang lahir pada bulan yang sama.

Contoh 4.23. Diketahui 145 biji-bijian disebarkan ke dalam suatu kotak berbentuk persegi panjang berukuran 6 x 16 cm. Tunjukkan bahwa setidak-tidaknya 7 butir biji-bijian tersebut terletak pada jarak kurang dari 3 cm satu dengan yang lainnya.

Jawab. Dengan membagi persegi panjang menjadi 3 x 8 = 24 bujursangkar yang panjang sisinya 2 cm, maka salah satu kotak tersebut memuat 7 biji-bijian (buktikan). Dengan demikian jarak antara sebarang dua biji-bijian di dalam bujursangkar yang sama, paling jauh berjarak $2\sqrt{2} < 3$ cm.

Contoh 4.24. Membuat kode matakuliah untuk kurikulum program studi pendidikan matematika dilakukan dengan cara menambahkan tiga angka pada huruf MAT. Terdapat 51 matakuliah yang harus diberi kode dan tiga angka yang harus ditambahkan pada huruf MAT harus berkisar antara 101 sampai dengan 200. Tunjukkan bahwa terdapat paling sedikit dua matakuliah yang diberi kode dengan angka berurutan.

Jawab. Misalkan angka-angka yang dipilih adalah $a_1, a_2, \ldots, a_{51}$. Jika angka-angka tersebut digunakan secara bersamaan dengan angka-angka $a_{1+1}, a_{2+1}, \ldots, a_{51+1}$ maka terdapat 102 nomor urut antara 101 sampai dengan 201. Karena ada 100 nomor yang disediakan (yaitu 101 sampai dengan 200) dan ada 102 nomor yang akan digunakan, maka terdapat paling sedikit dua nomor yang sama. Nomor urut $a_1, a_2, \ldots, a_{51}$ dan $a_{1+1}, a_{2+1}, \ldots, a_{51+1}$ semuanya berbeda, sehingga didapatkan $a_i = a_{j+1}$ yang menunjukkan bahwa kode a_i berurutan dengan kode a_j.

D.3. Penerapan Teori Bilangan

Prinsip sarang merpati dapat diterapkan untuk menyelesaikan beberapa masalah di dalam teori bilangan. Salah satunya adalah untuk menyelesaikan masalah tentang keterbagian bilangan. Jika suatu bilangan asli dibagi dengan bilangan asli lainnya, misalkanlah *m* maka akan terdapat *m* sisa pembagian yang mungkin, yaitu $0, 1, 2, \ldots, m-1$.

Menurut prinsip sarang merpati, dapat dibuktikan bahwa di antara $m+1$ bilangan asli yang berbeda, paling sedikit terdapat dua bilangan berbeda yang menghasilkan sisa yang sama apabila dibagi dengan *m*.

Misalnya dari 5 bilangan asli berbeda, terdapat dua bilangan yang menghasilkan sisa yang sama apabila dibagi 4. Contoh lainnya, misalkan terdapat *a*, yaitu bilangan relatif prima dari 2 dan 5. Dapat ditunjukkan bahwa untuk suatu *n*, terdapat bilangan *a* berpangkat yang berakhir dengan 000…1 dimana terdapat $n-1$ digit 0.

Pernyataan tersebut dapat dibuktikan sebagai berikut. Misalkan terdapat 10^n bilangan, yaitu $a^1, a^2, \cdots, a^{10n}$. Bagi semua bilangan dengan 10^n. Karena *a* relatif prima terhadap 10 maka sisa pembagian 0 tidak akan muncul sehingga terdapat $10^n - 1$ kemungkinan sisa, yaitu $1, 2, 3, \ldots, 10^n - 1$. dan akan terdapat dua bilangan dengan sisa yang sama. Anggaplah bahwa kedua bilangan tersebut adalah a^p dan a^q dengan $p > q$. Karena kedua bilangan memberikan sisa yang sama bila dibagi dengan 10^n, maka $a^p - a^q$ habis dibagi 10^n. Karenanya, $10^n \mid a^q(a^{p-q} - 1)$ dan haruslah $10^n \mid a^{p-q} - 1$ karena 10 dan *a* relatif prima satu dengan yang lainnya. Dengan demikian, $a^{p-q} = m.10^n + 1$ untuk suatu bilangan bulat *m*. Bilangan tersebut berakhir dengan $\underbrace{000\ldots1}_{n}$.

Sifat yang telah dibuktikan di atas juga dapat digunakan untuk membuktikan bentuk lain dari Teorema Sisa China yang menyatakan bahwa untuk sebarang dua bilangan relatif prima *m* dan *n*, terdapat *a* dan *b* dengan $0 \le a < m$ dan $0 \le b < n$ sehingga terdapat *x* yang dapat dinyatakan sebagai $x = pm + a = qn + b$ untuk sebarang $p, q \in \mathbb{Z}$.

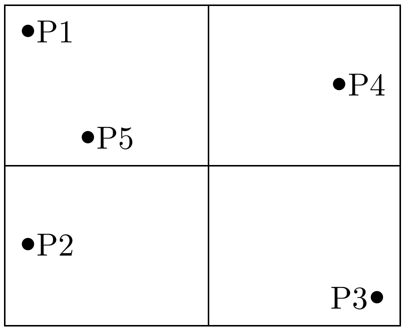
Bukti: Misalkan diketahui bilangan-bilangan $a, m+a, 2m+a, \ldots, (n-1)m + a$ yang semuanya bersisa *a* jika dibagi *m*. Asumsikan bahwa dua di antaranya, yaitu $im + a$ dan $jm + a$ memiliki sisa yang sama jika dibagi dengan *n* dimana $0 \le i < j \le n-1$. Selisih kedua bilangan habis dibagi *n* atau $n \mid (j-i)m$. Karena *m* dan *n* relatif prima maka $n \mid (j-i)$. Hal ini tidak dimungkinkan karena *i* dan *j* tidak lebih besar dari *n* sementara *n* harus lebih kecil atau sama dengan $j-i$. Oleh karena itu, asumsi bahwa kedua bilangan tersebut memiliki sisa yang sama jika dibagi dengan *n* merupakan asumsi yang salah dan ke-*n* bilangan itu memiliki sisa yang berbeda-beda jika dibagi *n*, yaitu $0 \le r < n$, termasuk *b*. Misalkan bilangan yang bersisa *b* jika dibagi *n* adalah $pm + a$, maka diperoleh suatu nilai *x* sehingga $x = pm + a = qn + b$.

D.4. Penerapan Geometri

Prinsip sarang merpati juga dapat diterapkan untuk menyelesaikan masalah geometri, misalnya jarak antar titik di bidang. Pada bidang dua dimensi, dari 5 titik dengan komponen absis dan ordinatnya bilangan bulat yang dipilih secara acak, dapat ditunjukkan adanya sepasang titik yang memiliki titik tengah dengan komponen absis dan ordinat berupa bilangan bulat.

Pernyataan ini dapat dibuktikan dengan menggunakan prinsip sarang merpati. Setiap bilangan bulat memiliki dua kemungkinan paritas, yaitu paritas genap atau ganjil. Nilai rata-rata dari dua bilangan bulat akan bulat jika paritasnya sama genap atau sama-sama ganjil. Dengan demikian pasangan titik yang dimaskudkan di atas akan memiliki salah satu dari pasangan paritas (genap, genap), (ganjil, ganjil), (genap, ganjil), atau (ganjil, genap). Menurut prinsip sarang merpati, jika dipilih 5 titik latis (titik tengah pada garis yang menghubungkan dua titik, yang memiliki absis dan ordinat berupa bilangan bulat), maka akan didapatkan dua titik dengan pasangan paritas yang sama. Kesamaan pasangan paritas mengakibatkan nilai rata-rata merupakan bilangan bulat sehingga titik tengahnya merupakan titik dengan absis dan ordinat bernilai bulat.

Hal yang sama berlaku juga untuk bidang tiga dimensi. Jika diketahui dua titik dengan titik tengah yang bernilai bulat dari sembilan titik yang dipilih sebelumnya. Prinsip sarang merpati dapat digunakan untuk mengetahui jarak antar titik di dalam bidang datar. Misalkan dipilih 5 titik yang terletak secara acak di dalam suatu daerah persegi dengan panjang sisi 2 satuan, maka terdapat setidak-tidaknya dua titik yang berjarak kurang dari atau sama dengan jarak titik diagonal daerah tersebut yaitu $\sqrt{2}$ satuan. Untuk membuktikan hal itu, maka persegi tersebut dibagi menjadi empat wilayah persegi kecil yang panjang sisinya 1 cm. Empat titik pertama haruslah diletakkan pada persegi kecil yang berbeda karena jarak terjauh adalah $\sqrt{2}$ cm. Bagaimanapun juga titik kelima harus diletakkan pada salah satu persegi kecil yang sudah ditempati setidak-tidaknya satu titik. Dengan demikian, jarak titik kelima dengan titik lainnya dalam satu persegi kecil yang sama dengan titik kelima tersebut haruslah lebih kecil atau sama dengan $\sqrt{2}$ cm.



Gambar 4.8. Jarak maksimum antar titik

D.5. Penerapan Prinsip Sarang Merpati Pada Ekspansi Desimal Bilangan Pecahan

Salah satu konsekuensi penting dari prinsip sarang merpati ialah fakta bahwa ekspansi desimal dari sebarang bilangan rasional dapat berbentuk desimal berulang atau desimal berhingga. Desimal berhingga misalnya 3,625 dan desimal berulang misalnya $2,38\overline{246}$. Garis di atas angka-angka 246 menunjukkan bahwa angka-angka tersebut berulang terus-menerus.

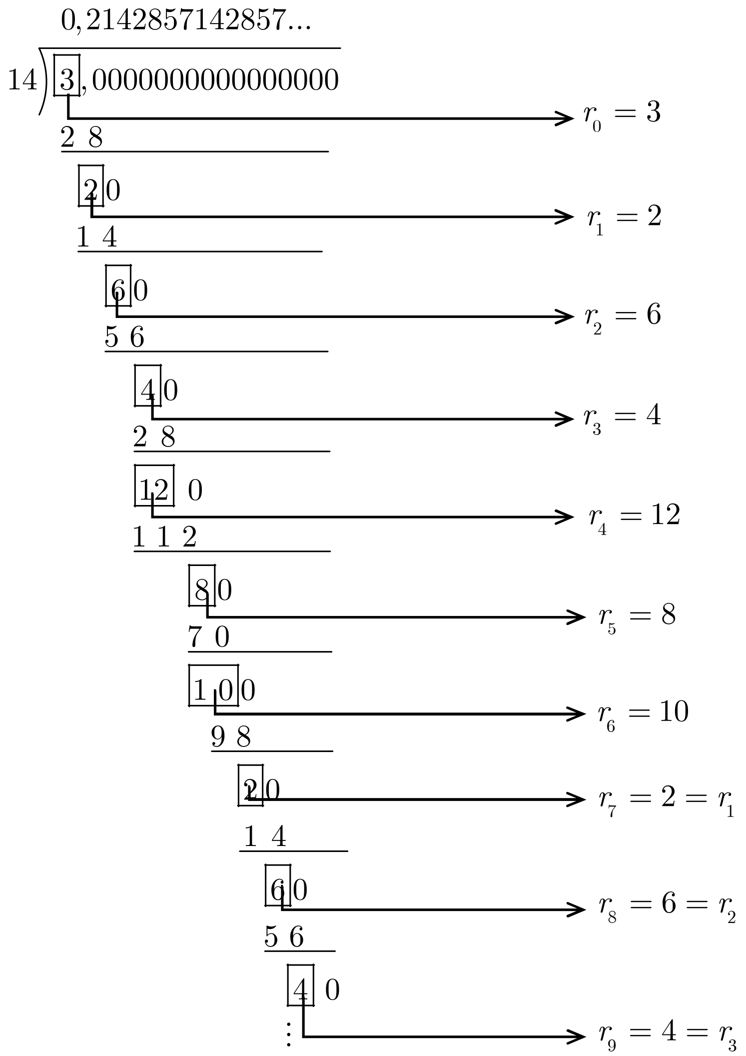
Seperti diketahui, bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dituliskan sebagai rasio bilangan-bilangan bulat, atau dengan kata lain dapat dituliskan dalam bentu bilangan pecahan. Telah diketahui juga bahwa ekspansi desimal dari suatu pecahan diperoleh dengan cara membagi pembilang terhadap penyebutnya melalui pembagian panjang. Sebagai contoh, ekspansi desimal dari 4/33 diperoleh sebagai berikut:

$$
\begin{array}{r l}
 & 0,12121212 \\
33 \big) & 4,00000000 \\
 & \underline{3\ 3} \\
 & 7\ 0 \\
 & \underline{6\ 6} \\
 & 4\ 0 \\
 & \underline{3\ 3} \\
 & 7\ 0 \\
 & \underline{6\ 6} \\
 & 4\ 0 \\
 & \underline{3\ 3} \\
 & \vdots
\end{array}
$$

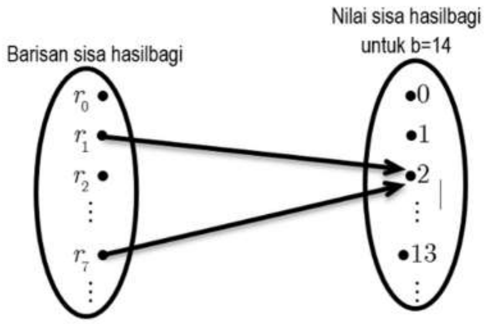
Karena 4 muncul secara berulang sebagai sisa dari proses pembagian panjang, maka barisan hasil bagi dan sisa pembagian akan berulang terus menerus. Secara umum jika suatu bilangan bulat dibagi oleh bilangan bulat lainnya, maka prinsip sarang merpati menjamin bahwa perulangan sisa hasil bagi dan dengan sendirinya angka-angka desimal akan selalu muncul.

Contoh 4.25. Ekspansi desimal suatu pecahan

Misalkan suatu pecahan *a/b*, dimana *a* dan *b* positif. Ekspansi desimal dari *a/b* diperoleh dengan membagi *a* terhadap *b* seperti pada contoh dibawah ini, dengan *a* = 3 dan *b* = 14.



Misalkan $r_0 = a$ dan $r_1, r_2, r_3, \cdots$ adalah sisa pembagian berturut-turut yang diperoleh dari pembagian panjang a/b. berdasarkan teorema pembagian sisa, masing-masing sisa hasil bagi bernilai antara 0 dengan $b-1$. Dalam contoh ini, $a = 3$ dan $b = 14$ maka sisa hasil baginya bernilai antara 0 sampai dengan 13. Jika terdapat sisa hasil bagi $r_i = 0,$ maka pembagian tersebut berhingga dan a/b memiliki nilai ekspansi desimal yang berhingga. Jika tidak terdapat $r_i = 0$ maka proses pembagian panjang dan juga ekspansi desimalnya berulang terus-menerus, atau tidak berhingga. Berdasarkan prinsip sarang merpati, karena sisa hasil bagi lebih banyak dari pada nilai sisa pembagian, maka terdapat nilai tertentu yang akan berulang, $r_j = r_k$ untuk suatu indeks *j* dan *k* dengan $j < k$. Hal ini digambarkan dibawah ini untuk $a = 3$ dan $b = 14$. Hal ini menunjukkan bahwa digit desimal yang diperoleh dari pembagian antara r_j dan r_{k-1} berulang terus-menerus. Pada kasus 3/14, perulangan terjadi pada $r_7 = 2 = r_1$ dan ekspansi desimalnya berulang mulai dari pembagian r_1 sampai dengan r_6. Ekspansi desimal yang diperoleh adalah $3/14 = 0,2\overline{142857}$.



Karena ekspansi desimal dari sebarang bilangan rasional dapat berulang atau berhingga, maka jika suatu bilangan memiliki ekspansi desimal yang tidak berulang ataupun tidak berhingga, maka bilangan tersebut bukan bilangan rasional. Bilangan berikut ini bukan bilangan rasional: $0,0101101110111101111\ldots$ dimana setiap angka 1 yang muncul tidak lebih banyak dari digit semua bilangan yang mendahuluinya.

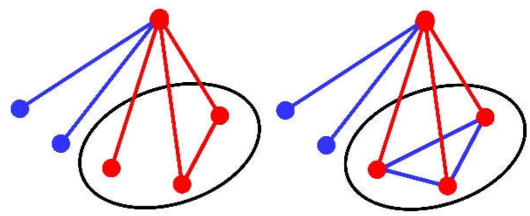
E. Teorema Ramsey

Teorema Ramsey merupakan generalisasi dari prinsip sarang merpati. Teori *Ramsey* diperkenalkan oleh Paul Erdos dan George Skenerez pada tahun 1935 sebagai bagian dari teori graf untuk melakukan pewarnaan garis-garis pada graf. Graf yang diwarnai dengan teori Ramsey adalah graf lengkap. Graf lengkap adalah graf yang setiap dua titik yang berbeda dihubungkan dengan tepat satu garis. Pada graf lengkap biasanya digunakan banyak warna untuk mewarnai garis-garisnya, tetapi dengan teori Ramsey garis-garis pada graf lengkap akan diwarnai dengan dua warna saja. Penerapan teori Ramsey pada pewarnaan graf dapat ditunjukkan jika terdapat bilangan positif *m* dan *n*, maka dapat ditentukan bilangan bulat terkecil $s = r(m, n)$ sedemikian sehingga bila sisi-sisi graf lengkap K_s dengan *s* titik diwarnai dengan merah dan biru, maka akan terbentuk subgraf K_m merah atau K_n biru.

Prinsip sarang merpati dapat diterapkan dalam pewarnaan sisi graf. Prinsip ini dapat menentukan eksistensi suatu graf komplet dengan satu warna, yang dijabarkan dalam Teorema Ramsey. Prinsip umum dari Teorema Ramsey secara sederhana dirumuskan bahwa *jika terdapat enam orang berbeda, dapat ditemukan setidak-tidaknya tiga pasang orang yang saling mengenal atau saling tidak mengenal.*

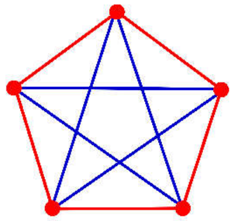
Bukti dari pernyataan tersebut dapat dilakukan dengan memisalkan keenam orang sebagai enam titik pada suatu graf. Jika orang pertama mengenal orang kedua, atau orang ketiga, atau orang keempat, dan seterusnya, maka hubungannya digambarkan sebagai sisi berwarna merah. Jika orang pertama tidak mengenal orang kedua, atau orang ketiga, atau orang keempat, dan seterusnya, maka hubungannya digambarkan sebagai sisi berwarna biru. Hubungan semua orang tersebut diperlihatkan dalam suatu K_6.

Pandang salah satu titik sebagai titik P1 yang memiliki 5 sisi yang menyatakan hubungannya dengan kelima titik lainnya. Dalam hal ini, menurut prinsip sarang merpati, paling sedikit terdapat tiga sisi berwarna warna sama, misalkan merah. Selanjutnya, perhatikan tiga sisi yang berwarna sama tersebut. Andaikan titik-titik yang dihubungkan dengan p_1 adalah $p_2, p_3, \text{dan } p_4,$ dan semua sisi $(p_2,p_3),(p_2,p_4),(p_3,p_4)$ tidak berwarna merah, maka ketiga sisi tersebut membentuk segitiga dengan warna biru. Jika salah satu sisinya berwarna merah, maka akan diperoleh sebuah segitiga semua sisinya berwarna merah.



Gambar 4.9. Segitiga monokromatik pada K_6

Penjelasan berikut ini tentang bilangan Ramsey yang dilambangkan dengan $R(m,n)$ yaitu jumlah titik minimum pada suatu graf sedemikian sehingga dapat ditentukan salah satu dari K_m dan K_n yang berwarna sama. Pada contoh 6 orang yang saling kenal atau tidak saling kenal, bilangan Ramsey dinyatakan dengan $r(3,3)=6.$ Dapat ditunjukkan bahwa $r(3,3) \neq 5$ karena pewarnaan K_5 dengan warna merah dan biru tidak menghasilkan segitiga yang sisi-sisinya berwarna sama.



Gambar 4.10. Segilima monokromatik pada K_5

Gambar 4.10. di atas adalah salah satu kemungkinan pewarnaan K_5 sedemikian sehingga tidak terdapat satu segitiga yang semua sisinya berwarna sama. Gambar tersebut dapat digunakan untuk menentukan nilai dari $r(2,n)$ dengan $r(2,n) \leq n$ karena untuk K_n dengan dua warna, dapat ditunjukkan bahwa salah satu sisinya memiliki warna berbeda dari sisi lainnya (K_2), atau semua sisi K_n berwarna sama. Kita juga dapat menentukan dari $r(2,n)$ dengan $r(2,n) > n-1$ karena jika semua sisi K_{n-1} berwarna sama, maka tidak akan terdapat K_2 atau K_n yang semua sisinya berwarna sama. Dengan cara yang tersebut, dapat dibuktikan bahwa $r(m,n) = r(n,m)$. Hingga saat ini belum dapat ditentukan rumus baku untuk menentukan nilai dari $r(m,n)$ untuk nilai *m* dan *n* yang sangat besar. Meskipun demikian, dapat ditentukan batasan nilai tersebut dengan menggunakan induksi matematika.

Batasan tersebut adalah $r(m,n) \leq r(m,n-1) + r(m-1,n)$. Ada atau tidak adanya nilai $r(m,n)$ dapat diketahui dengan menentukan batas atasnya. Dari induksi matematika, diketahui bahwa $r(m,n-1)$ dan $r(m-1,n)$ ada. Selanjutnya, perhatikan suatu graf lengkap dengan jumlah titik $r(m,n-1) + r(m-1,n)$. Misalkan dipilih titik *v* dan membagi sisanya ke dalam himpunan *M* dan *N* dengan ketentuan titik *w* ditetapkan sebagai anggota *M* jika (v,w) berwarna merah dan sebagai anggota *N* jika (v,w) berwarna biru. Karena graf tersebut memiliki $|M| + |N| + 1$ titik, maka salah satu dari pernyataan berikut benar: $|M| \geq r(m-1,n)$ atau $|N| \geq r(m,n-1)$. Jika graf pada himpunan *M* memuat K_n sisi yang berwarna merah, maka graf awal juga memuat K_n sisi yang berwarna merah. Jika graf pada himpunan *M* memuat K_{m-1} sisi yang berwarna biru, maka graf awal juga memuat

K_{m-1} sisi yang berwarna biru. Prinsip sarang merpati menjadi dasar dalam penentuan nilai dari bilangan Ramsey.

Bayangkan ada 6 orang di suatu pesta. Diasumsikan bahwa untuk setiap tiga orang di antaranya, maka ORANG PERTAMA MENGENAL KEDUA ORANG LAINNYA, atau TIDAK MENGENAL KEDUA ORANG LAINNYA. Jadi dapat diasumsikan bahwa jika p_1 mengenal p_2, maka p_2 mengenal p_1.

Klaim: Setidak-tidaknya ada 3 orang yang mengenal 3 orang yang lainnya, atau setidak-tidaknya ada 3 orang yang tidak mengenal 3 orang lainnya.

Bukti: Misalkan keenam orang tersebut adalah $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5,$ dan p_6. Perhatikan p_6. Di antara 5 orang lainnya, terdapat setidak-tidaknya 3 orang yang dikenal oleh p_6, atau terdapat setidak-tidaknya 3 orang yang tidak dikenal oleh p_6.

Mengapa begitu? Misalkan bahwa di antara 5 orang lainnya, terdapat paling banyak 2 orang yang dikenal oleh p_6 dan paling banyak 2 orang yang tidak dikenal oleh p_6. Dengan demikian diketahui bahwa hanya ada 4 orang lain, selain p_6. Hal ini kontradiksi dengan pernyataan bahwa ada 5 orang lain selain p_6. Misalkan p_6 mengenal setidak-tidaknya 3 orang lainnya, misalnya $p_1, p_2,$ dan p_3. Ketiga orang tersebut juga mengenal tiga orang yang lainnya.

- Jika p_1 mengenal p_2, maka $p_1, p_2,$ dan p_6 semuanya saling mengenal.
- Jika p_1 mengenal p_3, maka $p_1, p_3,$ dan p_6 semuanya saling mengenal.
- Jika p_2 mengenal p_3, maka $p_2, p_3,$ dan p_6 semuanya saling mengenal.

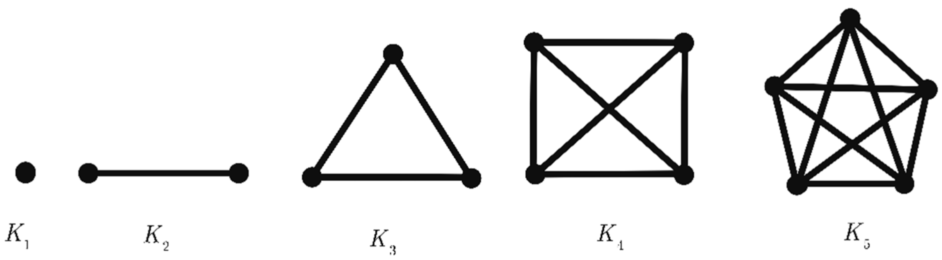
Bagaimana jika tidak satupun dari skenario di atas yang berlaku? Jika tdak ada pernyataan di atas yang dipenuhi, maka tidak ada dari ketiga orang ini (p_1, p_2, p_3) yang mengenal 2 orang lainnya. Dengan demikian klaim di atas telah terbukti. Proposisi 4.1 di bawah ini merupakan contoh Teorema Ramsey yang paling terkenal dan mudah dipahami:

Proposisi 4.1. Di antara 6 (atau lebih) orang, terdapat tiga orang yang saling kenal, atau terdapat tiga orang yang tidak saling kenal.

Salah satu cara untuk membuktikan pernyataan ini adalah dengan menunjukkan semua kemungkinan dari keenam orang untuk mengenal atau tidak mengenal kelima orang lainnya. Cara ini tidak praktis karena tidak mudah dilakukan untuk menguji jumlah yang lebih banyak. Ada cara yang lebih sederhana untuk membuktikan teorema tersebut. Sebelum memberikan bukti tersebut, akan dijelaskan rumusan yang lebih abstrak sebagai berikut:

$$\mathrm{K}_6 \rightarrow \mathrm{K}_3, \mathrm{K}_3 \quad \text{dibaca} \quad \mathrm{K}_6 \text{ panah } \mathrm{K}_3, \mathrm{K}_3 \ (2.1)$$

K_6 menyatakan suatu himpunan yang terdiri atas 6 objek dan semua 15 pasangan (tanpa memperhatikan urutan) objek-objek ini. Kita dapat membayangkan K_6 dengan memilih 6 titik yang terletak pada suatu bidang datar, tidak ada 3 titik yang terletak pada garis lurus yang sama, kemudian menggambarkan sisi atau segmen garis yang menghubungkan setiap pasang titik. Secara umum, K_n adalah himpunan *n* objek dan semua pasangan dari objek-objek tersebut (di dalam teori graf, K_n disebut *graf lengkap berorde n*). Ilustrasi K_n $(\mathrm{n} = 1, 2, 3, 4, 5)$ diperlihatkan pada Gambar 4.11. Perhatikan bahwa gambar dari K_3 berbentuk segitiga, karena itu K_3 sering disebut sebagai *segitiga.*



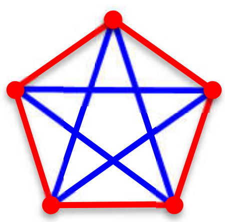
Gambar 4.11. Graf berorde 1, 2, 3, 4, 5.

Untuk membedakan pasangan yang saling kenal dengan yang tidak saling kenal di dalam diagram seperti pada gambar di atas, maka digunakan dua warna yang berbeda. Sisi yang menyatakan dua orang saling kenal digambarkan dengan warna merah, dan sisi yang menggambarkan dua orang tidak saling kenal digambarkan dengan warna biru. "Tiga orang yang saling kenal", digambarkan sebagai K_3 yang masing-masing sisinya berwarna merah, ringkasnya K_3 merah." Dengan demikian, tiga orang yang tidak saling kenal digambarkan sebagai K_3 biru. Berdasarkan gambaran ini, Proposisi 4.1 dapat dijelaskan sebagai berikut:

$K_6 \to K_3, K_3$ menyatakan bahwa warna apapun yang digunakan pada sisi K_6, merah maupun biru, sisi K_3 selalu berwarna merah (3 dari 6 titik awal dihubungkan dengan 3 garis yang selalu berwarna merah) atau sisi K_3 selalu berwarna biru (3 dari 6 titik awal dihubungkan dengan 3 garis yang selalu berwarna biru), singkatnya, selalu terdapat satu segitiga yang semua sisinya berwarna sama.

Untuk membuktikan $K_6 \to K_3, K_3$, dapat dijelaskan sebagai berikut: Misalkan sisi-sisi K_6 diberi warna merah atau biru dengan sebarang cara. Jika terdapat titik *p* pada sisi K_6 maka titik *p* tersebut dapat dihubungkan dengan titik-titik lainnya melalui 5 sisi. Karena setiap sisi ini berwarna merah atau biru, maka menurut prinsip sarang merpati bentuk kuat, setidak-tidaknya 3 sisi tersebut berwarna merah atau setidak-tidaknya 3 sisi tersebut berwarna biru. Misalkan 3 sisi yang dihubungkan dengan titik *p* berwarna biru. Sisi berwarna biru tersebut misalkan menghubungkan titik *p* dengan titik-titik *a, b,* dan *c.* Perhatikan bahwa sisi-sisi yang menghubungkan ketiga titik tersebut berpasangan. Jika semua sisi tersebut berwarna merah maka *a, b, c,* akibatnya terdapat satu K_3 merah. Jika salah di antara sisi tersebut berwarna biru, maka *p, a, b,* membentuk satu K_3 biru. Dengan demikian dapat dipastikan bahwa selalu terdapat K_3 yang berwarna merah atau biru.

$K_5 \to K_3, K_3$, adalah pernyataan yang salah. Hal ini disebabkan karena pada saat tertentu, sisi-sisi K_5 dapat diwarnai tanpa membentuk satu K_3 merah atau biru. Gambar di bawah ini memperlihatkan sisi-sisi yang berwarna merah dan biru pada suatu pentagon. Pada gambar tersebut tidak dapat dibentuk satu segi tiga yang semua sisinya berwarna merah atau semua berwarna biru.



Gambar 4.12. Sisi-sisi pada segilima

Jika $m \geq 2$ dan $n \geq 2$ adalah bilangan-bilangan bulat, maka terdapat suatu bilangan bulat positif *p* sedemikian sehingga $K_p \to K_m, K_n$. Dengan kata lain, jika ditentukan *m* dan *n* maka terdapat bilangan bulat positif *p* sedemikian sehingga jika sisi-

sisi K_p berwarna merah atau biru, maka ada kemungkinan didapatkan K_m berwarna merah atau sisi-sisi K_n berwarna biru. Adanya K_m berwarna merah atau K_n berwarna biru dapat dipastikan, bagaimanapun cara memberi warna terhadap sisi-sisi K_p.

Jika $K_p \to K_m, K_n$, maka $K_q \to K_m, K_n$, untuk sebarang bilangan bulat $q \geq p$. Bilangan Ramsey $r(m,n)$ adalah bilangan bulat terkecil *p* sedemikian sehingga $K_p \to K_m, K_n$. Bilangan Ramsey menyatakan adanya bilangan $r(m,n)$. salah satunya telah dibuktikan bahwa $r(3,3) = 6$. Bilangan Ramsey $r(2,n)$ dan $r(m,2)$ dapat ditentukan. Bilangan $r(2,n) = n$ dapat dijelaskan sebagai berikut:

- $(r(2,n) \leq n)$: Jika sisi-sisi dari K_n diberi warna biru atau merah, maka akan terdapat beberapa sisi yang berwarna merah (sehingga diperoleh K_2 merah), atau semua sisi berwarna biru (sehingga diperoleh K_n biru).
- $(r(2,n) > n-1)$: Jika semua sisi K_{n-1} diberi awrna biru, maka tidak dapat diperoleh K_2 merah maupun K_n biru.

Dengan cara yang sama, dapat ditunjukkan bahwa $r(m,2) = m$. Bentuk ini merupakan *Bilangan Ramsey trivial*. Secara umum, dengan mempertukarkan warna merah dan biru, dapat ditunjukkan bahwa $r(m,n) = r(n,m)$. Bilangan Ramsey non-trivial dapat dibaca dalam artikel "Small Ramsey Numbers", oleh S.P. Radziszowski, *Electronic Journal of Combinatoric,* Dynamic Survey #1.

$$
\begin{aligned}
&r(3,3) = 6 \\
&r(3,4) = r(4,3) = 9 \\
&r(3,5) = r(5,3) = 14 \\
&r(3,6) = r(6,3) = 18 \\
&r(3,7) = r(7,3) = 23 \\
&r(3,8) = r(8,3) = 28 \\
&r(3,9) = r(9,3) = 36 \\
&40 \leq r(3,10) = r(10,3) \leq 43 \\
&r(4,4) = 18 \\
&r(4,5) = r(5,4) = 25 \\
&43 \leq r(5,5) \leq 49.
\end{aligned}
$$

Perhatikan bahwa $r(3,10)$ yang terletak di antara 40 dan 43 menunjukkan bahwa $K_{43} \rightarrow K_3, K_{10}$ dan $K_{39} \not\rightarrow K_3, K_{10}$. Jadi tidak ada cara untuk mewarnai sisi-sisi K_{43} tanpa membentuk K_3 merah atau K_{10} biru. Sebaliknya, terdapat suatu cara mewarnai sisi-sisi K_{39} tanpa membentuk K_3 merah atau K_{10} biru, tetapi tidak ada kesimpulan ini yang dapat dipastikan berlaku pada $K_{40}, K_{41}, \text{dan } K_{42}$. Pernyataan bahwa $43 \leq r(5,5) \leq 55$ menunjukkan bahwa $K_{55} \rightarrow K_5, K_5$ artinya terdapat suatu cara mewarnai sisi-sisi K_{42} tanpa membentuk K_5 yang berwarna sama.

Teorema Ramsey dapat diberlakukan untuk sebarang banyaknya warna. Jika $n_1, n_2, \text{dan } n_3$ adalah bilangan-bilangan bulat yang lebih atau sama dengan 2, maka akan terdapat suatu bilangan bulat *p* sedemikian sehingga

$$K_p \rightarrow K_{n1}, K_{n2}, K_{n3}.$$

Dengan kata lain, jika masing-masing sisi K_p diberi warna merah, biru, atau hijau, maka dimungkinkan adanya K_{n1} merah, atau K_{n2} biru, atau K_{n3} hijau. Bilangan bulat *p* terkecil yang memenuhi pernyataan ini adalah bilangan Ramsey $r(n_1, n_2, n_3)$. Satu-satunya bilangan Ramsey non-trivial yang diketahui dari jenis ini adalah

$$r(3,3,3) = 17.$$

Bilangan Ramsey $r(n_1, n_2, n_3, \cdots, n_k)$ didefinisikan dengan cara yang sama, dan teorema Ramsey memastikan bahwa bilangan-bilangan tersebut ada, yaitu bahwa ada suatu bilangan bulat *p* sedemikian sehingga

$$K_p \rightarrow K_{n1}, K_{n2}, \cdots, K_{nk}.$$

F. Soal-Soal Latihan

1. Ada berapa elemen yang terdapat dalam himpunan $A_1 \cup A_2$ jika terdapat 12 elemen di A_1, 18 elemen di A_2, dan

   a. $A_1 \cap A_2 = \varnothing$? b. $|A_1 \cap A_2| = 1$?

   b. $|A_1 \cap A_2| = 6$? d. $A_1 \subseteq A_2$?

2. Sebanyak 345 mahasiswa semester IV pada program studi matematika telah lulus mata kuliah Kalkulus, 212 orang telah lulus mata kuliah Matematika Diskrit, dan 188 orang

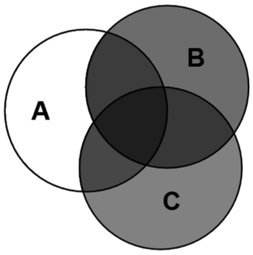
telah lulus mata kuliah Matematika Diskrit dan Kalkulus. Berapa orang mahasiswa yang telah lulus mata kuliah Kalkulus atau Matematika Diskrit?

3. Suatu survey yang dilakukan di kota X menungkapkan bahwa 96% keluarga memiliki sekurang-kurangnya satu televisi, 98% memiliki pesawat telepon, dan 95% memiliki pesawat telepon dan sekurang-kurangnya satu televisi. Ada berapa persen keluarga di kota tersebut yang tidak memiliki televisi maupun telepon?
4. Carilah banyaknya elemen di dalam $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ jika terdapat 100 elemen di dalam setiap himpunan dan jika:
   a. Pasangan himpuan yang digabungkan tersebut disjoint satu dengan yang lain.
   b. Terdapat 50 elemen irisan antara dua himpunan yang digabung, tetapi tidak ada himpunan irisan dari ketiga himpunan.
5. Carilah banyaknya elemen di $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ jika terdapat 100 elemen di A_1, 1000 elemen di A_2, dan 10000 elemen di A_3 jika:
   a. $A_1 \subseteq A_2$ dan $A_2 \subseteq A_3$.
   b. A_1 disjoint dengan A_2, dan A_2 disjoint dengan A_3.
   c. $|A_1 \cap A_2| = 2$, $|A_2 \cap A_3| = 2$, dan $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 1$.
6. Ada berapa *string* yang dapat disusun dari satu sampai empat digit? String yang berbeda jumlah digitnya menyatakan string yang berbeda, sehingga digit 10 berbeda dengan digit 0010.
7. Ada berapa string yang dapat dibentuk dengan digit hexadesimal satu sampai tiga? (Digit hexadesimal terdiri atas 16 digit yaitu 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F).
8. Ada berapa string yang dapat dibentuk dengan digit hexadesimal dari digit dua sampai dengan digit lima?
9. Ada berapa bilangan bulat yang dapat disusun dengan menggunakan angka 1 sampai dengan 999 yang angka-angkanya tidak berulang?
10. Ada berapa bilangan bulat yang dapat disusun dengan menggunakan angka 1 sampai dengan 999 yang memiliki angka berulang setidak-tidaknya satu kali?
11. Berapa peluangnya jika satu bilangan bulat dipilih secara acak dari 1 sampai 999 yang memiliki angka berulang setidak-tidaknya satu kali?
12. Berapa susunan yang dapat dibentuk dari kata NEGATIF dengan menggunakan sebanyak-banyaknya tiga huruf dan tidak ada huruf berulang?

13. Ada berapa banyaknya bilangan bulat 5 angka dari 10000 sampai dengan 99999 yang merupakan kelipatan 5?
14. Berapa peluang terpilihnya bilangan bulat 5 angka yang merupakan kelipatan 5 jika dipilih secara acak dari 10000 sampai dengan 99999?
15. Tanda nomor kendaraan di negara tertentu terdiri atas nol sampai tiga huruf kapital diikuti dengan nol sampai empat angka. Tidak dimugkinkan tanda nomor yang semuanya kosong.
    a. Berapa pelat nomor kendaraan yang dipat dibuat di kota tersebut?
    b. Misalkan sebanyak 85 tanda nomor tidak boleh digunakan karena membentuk susunan yang berkonotasi sensitif (misalnya PKI1965), berapa pelat nomor yang dapat dibuat?
16. Semua tanda nomor kendaraan di suatu negara terdiri atas empat sampai enam simbol yang dipilih dari kombinasi 26 (A-Z) huruf abjad dan 10 angka (0-9).
    a. Ada berapa banyak pelat nomor kendaraan yang dapat dibuat jika diperbolehkan menggunakan karakter berulang?
    b. Ada berapa pelat nomor kendaraan yang tidak mengandung karakter berulang?
    c. Ada berapa pelat nomor kendaraan yang mengandung setidak-tidaknya satu karakter berulang?
    d. Berapa peluang terpilihnya secara acak satu pelat nomor kendaraan yang mengandung karakter berulang?
17. Password untuk mengakses komputer dalam sutau jaringan terdiri atas 3-5 karakter yang terdiri atas 26 huruf abjad, 10 angka, dan 14 simbol khusus (seperti ?!@#$%()&^[{] }).
    a. Ada berapa kombinasi password yang mungkin disusun, jika karakter boleh berulang?
    b. Ada berapa banyak password yang tidak mengandung karakter berulang?
18. Suatu universitas melakukan survey untuk mengetahui daya tarik dan prestasi akademik mahasiswanya. Angket survey yang diberikan terdiri atas 3 pilihan dalam bentuk pernyataan sebagai berikut:
    a. Pernyataan #1: Saya mencapai prestasi terbaik dalam semester yang lalu.
    b. Pernyataan #2: Saya menjadi anggota kelompok akademik tertentu
    c. Pernyataan #3: saya menguasai sekurang-kurangnya dua mata kuliah

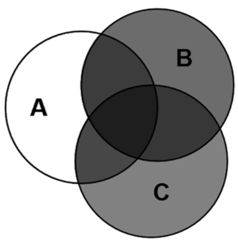
    Dari 100 mahasiswa yang menjadi reponden, 28 orang memilih Pernyataan #1, 26 orang memilih Pernyataan #2, dan 14 orang memilih Pernyataan #3. Selanjutnya, 8 orang memilih Pernyataan #1 dan #2, 4 orang memilih Pernyataan #1 dan #3, 3 orang memilih Pernyataan #2 dan #3, dan 2 orang memilih Pernyataan #1, #2, dan #3.

a. Ada berapa orang mahasiswa yang memilih sekurang-kurangnya satu pernyataan?
b. Ada berapa mahasiswa yang tidak memilih semua pernyataan?
c. Misalkan A adalah himpunan semua mahasiswa yang memilih Pernyatan #1, B adalah himpunan semua mahasiswa yang memilih Pernyataan #2, dan C adalah himpunan semua mahasiswa yang memilih Pernyataan #3. Isiliah kedelapan daerah himpunan di bawah ini berdasarkan banyaknya anggota himpunan yang ada di wilayah tersebut.



a. Berapa orang mahasiswa yang memilih Pernyataan #1 dan #2 tetapi tidak memilih #3?
b. Berapa orang mahasiswa yang memilih Pernyataan #2 dan #3 tetapi tidak memilih Pernyataan #1?
c. Berapa orang yang memilih Pernyataan #2 tetapi tidak memilih Pernyataan #1 dan #3?

19. Suatu penelitian dilakukan untuk mengetahui efektifitas tiga jenis komposisi obat untuk menghilangkan sakit kepala. Pada diagram di bawah ini, A, B, dan C masing-masing menyatakan himpunan objek penelitian yang dapat sembuh dengan menggunakan obat komposisi A, B, dan C. Isilah dengan data hasil penelitian.



Selama jangka waktu tertentu, 50 orang subjek penelitian dibebaskan memilih salah satu dari tiga komposisi obat. Hasil penelitian adalah sebagai berikut:

21 orang sembuh dengan komposisi A

21 orang sembuh dengan komposisi B

31 orang sembuh dengan komposisi C

9 orang sembuh dengan komposisi obat A dan B

14 orang sembuh dengan komposisi A dan C

15 orang sembuh dengan komposisi B dan C

41 orang sembuh dengan menggunakan salah satu dari ketiga jenis komposisi

Penelitian tersebut juga menunjukkan bahwa terdapat 21 orang yang sembuh dengan komposisi A ternyata juga dapat sembuh dengan komposisi B maupun C. Hasil yang sama juga berlaku untuk komposisi B dan C.

a. Ada berapa orang yang sembuh tanpa mengkonsumsi ketiga obat tersebut?
b. Ada berapa orang yang dapat sembuh dengan menggunakan salah satu dari komposisi obat tersebut?
c. Berapa orang yang sembuh dengan menggunakan obat komposisi A saja?

20. Prinsip inklusi-eksklusi dapat diaplikasikan untuk memeriksa konsistensi suatu hasil survey. Misalnya suatu survey dilakukan untuk mengetahui opini masyarakat yang diambil dari 1200 orang dewasa, 675 orang yang sudah menikah, 682 berusia antara 20 sampai 30 tahun, 684 berjenis kelamin wanita, 195 di antara sudah menikah dan berusia antara 20 sampai 30 tahun. Apakah data tersebut bersifat konsisten? Apakah data seperti itu dapat digunakan sebagai sampel survey?

21. Sebutkanlah alasan dari masing-masing operasi di bawah ini. Jika A dan B adalah himpunan-himpunan yang berada di dalam himpunan semesta U, maka:

$$\begin{aligned} N(A \cap B) &= N(U) - N\left((A \cap B)^C\right) && \underline{\qquad\qquad} \\ &= N(U) - N\left(A^C \cup B^C\right) && \underline{\qquad\qquad} \\ &= N(U) - \left(N\left(A^C\right) + N\left(B^C\right) - N\left(A^C \cap B^C\right)\right) && \underline{\qquad\qquad} \end{aligned}$$

22. Ada berapa banyaknya kaos kaki yang harus diambil dari 19 pasang kaos kaki yang berbeda untuk memastikan bahwa setidak-tidaknya ada satu pasang kaos kaki dapat diambil?

23. Ada berapa bilangan bulat positif yang kurang dari 100 yang harus dipilih secara acak agar dapat dipastikan bahwa setidak-tidaknya salah satu di antara bilangan tersebut merupakan kelipatan 7?

24. Ada berapa banyak bilangan dari $\{1, 2, \cdots, 99\}$ yang harus dipilih untuk memastikan bahwa jumlah dua bilangan di antara bilangan yang dipilih tersebut adalah 100?

25. Misalkan diketahui jumlah penduduk suatu kota adalah 4 juta jiwa, dapatkah dipastikan bahwa setidak-tidaknya terdapat 21 orang di antaranya yang jumlah rambut

di kepalanya tepat sama? (jumlah helai rambut di kepala manusia tidak lebih dari 200.000 helai)

26. Ada berapa banyak kata yang harus dibentuk dari ke-26 huruf latin sedemikian sehingga setidak-tidaknya 3 di antara kata tersebut diawali dengan huruf yang sama dan diakhiri dengan huruf yang sama?
27. Ada 606 kelereng disebar di dalam suatu bidang bujursangkar yang panjang sisinya 1 satuan. Tunjukkan bahwa setidak-tidaknya 6 dari kelereng tersebut berada dalam satu lingkaran yang berjari-jari 1/15 satuan. (Bujursangkar tersebut dapat dibagi menjadi bujursangkar yang lebih kecil yang dapat termuat di dalam suatu lingkaran berjari-jari 1/15 satuan)
28. Di dalam suatu kotak, terdapat 13 bola biru, 10 bola merah, 8 bola hijau, dan 6 bola kuning. Berapa bola yang harus diambil sedemikian sehingga:
    a. Setidak-tidaknya 5 di antaranya berwarna sama
    b. Setidak-tidaknya 3 bola berwarna hijau
    c. Setidak-tidaknya ada satu bola dari setiap warna.
29. Tunjukkan bahwa jika $n+1$ bilangan bulat dipilih dari himpunan $\{1,2,3,\cdots,2n\}$, maka selalu terdapat setidak-tidaknya dua bilangan yang selisihnya satu.
30. Tunjukkan bahwa jika $n+1$ bilangan bulat dipilih dari himpunan $\{1,2,3,\cdots,3n\}$, maka selalu terdapat setidak-tidaknya dua bilangan yang selisihnya setidak-tidaknya dua.
31. Gunakan prinsip sarang merpati untuk membuktikan bahwa ekspansi desimal dari suatu bilangan rasional m/n adalah desimal berulang. Sebagai contoh, $34.478/99.900 = 0,345251251251\cdots$.
32. Seorang anak menonton televisi sekurang-kurangnya 1 jam dalam sehari selama 7 minggu tetapi tidak pernah lebih dari 11 jam dalam satu minggu. Buktikan bahwa terdapat rentang waktu hari tertentu secara berturut-turut anak tersebut menonton televisi selama 20 jam tepat. Asumsikan bahwa anak tersebut menonton televisi sepanjang hari berturut-turut.
33. Seorang mahasiswa memiliki kesempatan untuk mempersiapkan diri menjelang ujian semester. Berdasarkan pengalamannya, mahasiswa tersebut mengetahui bahwa dia tidak mungkin memiliki waktu lebih dari 60 jam untuk mempersiapkan diri. Dia ingin belajar setidak-tidaknya 1 jam per hari. Tunjukkan bahwa bagaimanapun cara

menyusun jadwal belajarnya, terdapat rentangan hari berturut-turut di mana mahasiswa tersebut harus belajar selama 13 jam tanpa henti.

34. Misalkan *S* adalah suatu himpunan titik di dalam suatu bidang datar. Tidak terdapat 3 titik yang terletak dalam satu garis lurus. Titik-titik tersebut dihubungkan dengan 15 garis yang berwarna merah dan biru. Tunjukkan bahwa jika terdapat setidak-tidaknya dua segitiga yang berwarna merah atau berwarna biru. (Kedua segitiga berwarna biru, atau keduanya berwarna merah, atau salah satunya berwarna merah, dan yang lainnya berwarna biru).
35. Suatu keranjang berisi 100 apel, 100 pisang, dan 100 jeruk. Jika seseorang mengambil satu buah setiap menit, berapa lamanya waktu yang dibutuhkan sehingga salah satu jenis buah terambil sebanyak setidak-tidaknya 1 lusin?
36. Butkikan bahwa untuk sebarang $n+1$ bilangan bulat $a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}$, terdapat setidak-tidaknya dua bilangan bulat a_i dan a_i dengan $i \neq j$ sedemikian sehingga $a_i - a_j$ merupakan kelipatan *n*.
37. Buktikan bahwa di dalam suatu kelompok yang jumlah anggotanya $n > 1$ orang, terdapat setidak-tidaknya dua orang yang memiliki jumlah kenalan yang sama di dalam kelompok tersebut.
38. Ada 100 orang yang menghadiri suatu pesta. Masing-masing orang memiliki kenalan yang berjumlah genap (bisa 0). Buktikan bahwa terdapat setidak-tidaknya 3 orang yang memiliki jumlah kenalan yang sama.
39. Buktikan bahwa jika sebarang lima titik dipilih di dalam suatu bidang bujursangkar yang panjang sisinya 2 satuan, maka terdapat setidak-tidaknya dua titik di antaranya berjarak paling jauh $\sqrt{2}$ satuan.
40. Buktikan bahwa sebarang 5 titik yang dipilih di dalam suatu segitiga samasisi dengan panjang sisi 1 satuan, maka terdapat setidak-tidaknya dua titik yang berjarak paling jauh ½ satuan.
41. Tunjukkan bahwa $r(3,3,3) \leq 17$.
42. Buktikan bahwa $r(3,3,3) \geq 17$ dengan memisalkan pewarnaan merah, biru, dan hijau, terhadap garis-garis yang menghubungkan 16 titik dengan ketentuan bahwa tidak terdapat 3 titik sedemikian sehingga 3 garis yang menghubungkan ketiga titik tersebut berwarna yang sama.

43. Buktikan bahwa $r\underbrace{(3,3,\cdots,3)}_{k+1} \le (k+1)\left(\underbrace{(3,3,\cdots,3)}_{k+1}\right)+2$

44. Gunakan bukti pada soal nomor 45 untuk menentukan batas atas dari $r\underbrace{(3,3,\cdots,3)}_{n}$.

45. Ruas-ruas garis berwarna merah atau biru, menghubungkan 10 titik. Buktikanlah bahwa terdapat 3 titik sedemikian sehingga ketiga garis yang menghubungkannya berwarna merah semua, atau 4 titik sedemikian sehingga 6 garis yang menghubungkannya berwarna biru semua (yaitu $r(3,4) \le 10$).

46. Misalkan q_3 dan t adalah bilangan-bilangan bulat dengan $q_3 \ge t$. Tentukan bilangan Ramsey $r_t(t,t,q_3)$.

47. Kumpulan subset-subset dari $\{1,2,3,\cdots,n\}$ memiliki sifat bahwa masing-masing pasangan subset memiliki sekurang-kurangnya satu elemen yang sama. Buktikanlah bahwa dalam kumpulan tersebut sebanyak-banyaknya terdiri atas 2^{n-1} subset.

BAB V
FUNGSI PEMBANGKIT

A. Pendahuluan

Pada awal tahun 1970-an A.A. Kirilov selalu membuka seminar dengan masalah di bawah ini. Seorang penumpang bus akan membeli tiket dari petugas loket. Pada setiap lembar tiket tercantum nomor seri tiket yaitu 6 digit angka. Berdasarkan nomor seri pada tiket, penumpang tertentu akan memperoleh hadiah jika jumlah tiga digit pertama sama dengan jumlah tiga angka terakhir. Jadi nomor seri 123060 adalah tiket yang beruntung, sedangkan nomor seri 123456 tidak beruntung. Ada berapa tiket yang beruntung?

Mahasiswa yang memiliki keterampilan dasar dalam pemrograman komputer tidak akan kesulitan menyusun suatu program yang dapat menghitung banyaknya tiket yang beruntung. Program yang paling sederhana dapat disusun untuk mencari semua bilangan dari 000000 sampai dengan 999999 dan menentukan tiket yang beruntung. Di sini tidak akan dibicarakan cara menyusun program komputer. Tetapi masalah seperti ini akan dijabarkan dengan cara yang lebih detail.

Pertama, semua tiket yang beruntung dikelompokkan jumlah tiga angka pertama dalam nomor seri tiketnya. Jumlah tiga angka pertama adalah 0 (untuk 000) sampai dengan 27 (999). Karena itu, banyaknya angka dalam kelompok ini ada 28. Misalkan a_n menyatakan banyaknya bilangan tiga digit yang berjumlah *n*, maka nilai-nilai a_n adalah:

$a_o = 1$ (hanya satu jumlahan tiga digit yang sama dengan 0)
$a_1 = 3$ (ada tiga jumlahan tiga digit yang sama dengan 1, yaitu 001, 010, 100)
$a_2 = 6$ (002, 020, 200, 011, 101, 110)

Banyaknya tiket beruntung yang jumlah tiga angka pertamanya sama dengan *n* adalah a_n^2. Sebarang tiga digit yang berjumlah *n* dapat disusun untuk tiga angka pertama maupun tiga angka terakhir dari nomor seri tiket. Karena itu menghitung banyaknya tiket keberuntungan dapat dilakukan dengan menghitung a_n kemudian menentukan kuadratnya. Sebelum menghitung a_n, kita akan mencoba menghitung banyaknya bilangan satu dan dua digit dengan jumlah *n*. Untuk setiap *n* = 0, 1, 2, …, 9 terdapat satu bilangan berdigit satu, yang jumlah semua angkanya adalah *n*. Bilangan digit satu akan digambarkan lebih lanjut dengan menggunakan polinomial $A_1(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^9$.

Koefisien dari polinomial ini memiliki arti sebagai berikut: *koefisien* x^n *di dalam polinomial* A_1 *menyatakan banyaknya bilangan berdigit satu yang memiliki jumlah digit sama dengan n*. Dengan kata lain, koefisien x^n dari A_1 yaitu 1, menunjukkan bahwa $0 \le n \le 9$ dan 0 untuk $n > 9$.

Selanjutnya polinomial $A_2(x)$ yang menggambarkan bilangan yang terdiri atas dua digit. Koefisien dari x^n di dalam $A_2(x)$ adalah banyaknya bilangan berdigit dua yang jumlahan digitnya *n*, termasuk bilangan yang dimulai dengan angka 0 dan 00. Dengan mudah dapat diketahui bahwa bilangan yang dimaksud adalah 18. Sebenarnya, 18 adalah jumlahan terbesar yang mungkin dari suatu bilangan dua digit. Penjumlahan dari beberapa koeefisien pertama dari polinomial ini masih dapat ditentukan tanpa kesulitan, yaitu:

$$A_2(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$$

Polinomial A_2 berhubungan erat dengan polinomial A_1 dan dapat dinyatakan bahwa $A_2(x) = (A_1(x))^2$. Hal ini dapat dibuktikan dengan menunjukkan bahwa **h**asilkali dari dua polinomial x^k dan x^m berkontribusi terhadap koefisien x^n di dalam polinomial $(A_1(x))^2$ jika dan hanya jika $n = k + m$. Karena itu, koefisien x^n di dalam $(A_1(x))^2$ dengan tepat menyatakan banyaknya cara menyatakan *n* sebagai jumlah dari *n* = *k* + *m*, *k*, *m* = 0, 1, 2, . . ., 9. Polinomial pada ruas kanan dari identitas tersebut sama dengan A_2.

Selanjutnya untuk bentuk polinomial $A_3(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{27}x^{27}$, dapat ditunjukkan bahwa $A_3(x) = (A_1(x))^3$.

Bukti. Pembuktian dari pernyataan ini masih berkaitan dengan pembuktian pernyataan sebelumnya: koefisien x^n di dalam polinomial $(A_1(x))^3$ sama dengan bilangan *n* yang merupakan jumlahan dari tiga digit, yaitu $n = m + k + l$, dengan $m, k, l = 0, 1, 2, 3, \cdots, 9$.

Masalah tiket keberuntungan hampir rampung; tugas terakhir yang akan diselesaikan adalah menghitung polinomial $(A_1(x))^3$ kemudian menentukan jumlah kuadrat dari koefisien-koefisiennya. Perkalian dengan $A_1(x)$ merupakan suatu operasi yang cukup sederhana, dapat dilakukan dalam waktu paling lama 10 menit, sehingga tidak diperlukan program komputer.

Polinomial Laurent dengan variabel *x* yang dirumuskan dalam bentuk

$$A_3\left(\tfrac{1}{x}\right) = a_o + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_{27}}{x^{27}} \tag{5.47}$$

adalah polinomial yang menyangkut $A_3(x)$. Perkalian $A_3(x)A_3(\tfrac{1}{x})$ juga merupakan polinomial Laurent yang mengandung x^k baik untuk nilai *k* yang positif maupun negatif, tetapi nilai *k* tersebut dibatasi, dari bawah dan dari atas. Suku-suku bebas dalam perkalian ini (koefisien x^o) berbentuk $a_o^2 + a_1^2 + \cdots + a_{27}^2$ sehingga disimpulkan bahwa *banyaknya tiket beruntung yang sama dengan banyaknya suku bebas dalam polinomial Laurent* $A_3(x)A_3(\tfrac{1}{x})$. Suku bebas ini dapat dihitung dengan menggunakan fakta dasar dari teori fungsi variabel kompleks tunggal, teorema Cauchy.

Teorema 5.1: Teorema Cauchy. *Untuk sebarang polinomial Laurent* $p(x)$, *suku bebasnya adalah*

$$p_o = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{p(x)dx}{x} \tag{5.48}$$

dimana, operasi integral bekerja pada sebarang lingkaran yang arahnya berlawanan arah jarum jam pada bidang kompleks yang memiliki titik pusat. Dengan kata lain, $\int x^k dx$ pada lingkaran tersebut adalah $2\pi i$ jika *k* = -1, dan sama dengan 0 jika $k \neq -1$. Fakta ini dapat dibuktikan dengan mudah. Lingkaran yang paling sederhana yang dapat digunakan di sini adalah lingkaran satuan yang berpusat pada titik (0, 0). Berdasarkan kenyataan bahwa

$$A_1(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^9 = \frac{1-x^{10}}{1-x} \tag{5.49}$$

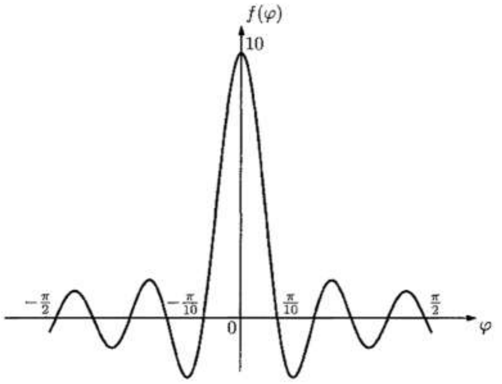
maka polinomial Laurent dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$\begin{aligned} P(x) &= A_3(x)A_3\left(\tfrac{1}{x}\right) = A_1^3(x)A_1^3\left(\tfrac{1}{x}\right) \\ &= \left(\frac{1-x^{10}}{1-x}\right)^3\left(\frac{1-x^{-10}}{1-x^{-1}}\right)^3 = \left(\frac{2-x^{10}-x^{-10}}{2-x-x^{-1}}\right)^3. \end{aligned}$$

Misalkan digunakan parameter standar φ pada lingkaran satuan seperti yang disebutkan di atas dan menerapkan polinomial Laurent $P(x)$ pada lingkaran ini, maka akan diperoleh suku bebas dari polinomial:

$$p_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{2-2\cos(10\varphi)}{2-2\cos\varphi}\right)^3 d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin^2(5\varphi)}{\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\right)^3 d\varphi$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin(10\varphi)}{\sin\varphi}\right)^6 d\varphi = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin(10\varphi)}{\sin\varphi}\right)^6 d\varphi \qquad (5.50)$$



Gambar 5.1. Bentuk grafik $f(\varphi) = \dfrac{\sin(10\varphi)}{\sin\varphi}$

Mahasiswa dapat mencoba memperkirakan nilai dari integral terakhir. Grafik dari fungsi $f(\varphi) = \dfrac{\sin(10\varphi)}{\sin\varphi}$ pada interval $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ diperlihatkan pada Gambar 5.1. Fungsi tersebut memiliki nilai maksimum 10 yang terletak di titik pusat lingkaran. Nilai fungsi *f* pada interval $\left[-\dfrac{\pi}{10}, \dfrac{\pi}{10}\right]$ kurang dari $\dfrac{1}{\sin\dfrac{\pi}{10}} \approx 3.$ oleh karena itu kontribusi dari komplemen pada interval $\left[-\dfrac{\pi}{10}, \dfrac{\pi}{10}\right]$ dalam persamaan (5.4) tidak lebih besar dari $\pi.3^6 \approx 2100$. Sebagian besar kontribusi terhadap persamaan (5.4) terjadi pada integral $\left[-\dfrac{\pi}{10}, \dfrac{\pi}{10}\right]$. Untuk menentukan kontribusi ini, maka digunakan *metode fase stasioner*. Melalui metode ini, maka asimtot dari $\int_{-\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{10}} f^t d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{10}} e^{t\ln f} d\varphi$ jika $t \to \infty$. Jika nilai *t* cukup besar maka nilai integral ditentukan oleh sifat fungsi $\ln f$ (fase) di sekitar titik stasioner 0, yaitu pada titik dimana $(\ln f)' = 0$, atau pada saat $f' = 0$. di sekitar titik stasioner, $f(\varphi) \approx 10\left(1 - \frac{33}{2}\varphi^2\right)$,

dan $\ln f(\varphi) \approx \ln 10 - \frac{33}{2}\varphi^2$. untuk nilai *i* yang cukup besar,

$$\int_{-\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{10}} e^{t\left(\ln 10 - \frac{33}{2}\varphi^2\right)} d\varphi = e^{t\ln 10} \int_{-\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{10}} e^{-\frac{33}{2}t\varphi^2} d\varphi \approx e^{t\ln 10} \frac{\sqrt{2\pi}}{33t}$$

Dengan memilih *t* = 6 dan menerapkan kembali persamaan (5.4) maka diperoleh

$$p_0 \approx \frac{10^6}{11\pi} \approx 56700.$$

Contoh yang digambarkan di atas memungkinkan kita mengambil kesimpulan tentang masalah yang dihadapi dengan memilih metode yang akan digunakan. Pembahasan utama dalam bab ini adalah tentang kombinatorika enumeratif. Ini berarti kita akan mempelajari enumerasi objek-objek dari sekelompok himpunan-himpunan berhingga. Setiap himpunan tersebut terdiri atas anggota-anggota yang jumlahnya berhingga (dalam contoh tiket keberuntungan, jumlah tersebut adalah *jumlah* dari *n* dari tiga angka pertama).

Suatu masalah enumeratif adalah masalah yang pada prinsipnya dapat diselesaikan. Dengan kata lain semua anggota dari suatu himpunan dapat diketahui dan jumlahnya dapat dipastikan. Meskipun demikian, masalah enumeratif di sini adalah mencari solusi yang baik tanpa menjabarkan semua elemen-elemen himpunannya. Sebaliknya, menentukan solusi yang baik merupakan tugas yang sulit karena biasanya kita hanya bisa membandingkan dua solusi kemudian memilih salah satu yang lebih baik.

Polinomial pembangkit (atau secara lebih umum disebut deret pembangkit) sangat berguna di dalam menyelesaikan masalah-masalah enumeratif. Operasi-operasi dengan kombinatorial dapat diubah menjadi operasi-operasi fungsi pembangkit.

Definisi 5.1. Misalkan $a_0, a_1, a_2, \cdots$ adalah sebarang barisan tak hingga bilangan. Fungsi pembangkit (atau deret pembangkit) dari barisan ini merupakan suatu pernyataan pernyataan yang berbentuk

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$$

atau ringkasnya,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Jadi fungsi pembangkit dari barisan $a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots,$ adalah suatu deret pangkat formal, yang berbentuk

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{5.51}$$

Fungsi pembangkit tidak hanya dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah seperti yang disebutkan di atas tetapi juga lebih memudahkan menyelesaikan masalah yang lebih banyak syarat batasnya.

Fungsi pembangkit merupakan suatu alat yang sangat berguna untuk menyelesaikan masalah relasi rekurensi homogen linier dengan koefisien konstan. Fungsi pembangkit ditemukan pada tahun 1718 oleh matematikawan Perancis, Abraham De Moivre, untuk menyelesaikan relasi rekurensi Fibonacci. Selain itu fungsi pembangkit juga dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah kombinatorial. Jika semua elemen di dalam barisan tersebut dimulai dari suatu elemen yang sama dengn nol, maka fungsi pembangkit yang sesuai dengan barisan tersebut dinamakan *pembangkit polinomial.*

B. Fungsi Pembangkit

B.1. Definisi dan Contoh-Contoh.

Fungsi pembangkit biasa (*ordinary generating function*) untuk barisan $g_0, g_1, g_3, \cdots$ adalah deret pangkat $G(x) = g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + g_3 x^3 + \cdots$. Ada beberapa bentuk fungsi pembangkit yang sering digunakan, tetapi fungsi pembangkit biasa sudah cukup memadai untuk menggambarkan penerapannya secara umum. Oleh karena itu, sebagian besar penjelasan di sini adalah fungsi pembangkit biasa.

Fungsi pembangkit adalah deret pangkat “formal” dalam arti bahwa kita selalu menggunakan variabel *x* (bukan angka) untuk menyatakan posisi. Dalam kasus yang jarang sekali, fungsi pembangkit dihitung dengan menyatakan *x* sebagai bilangan. Untuk menyatakan hubungan antara barisan dengan fungsi pembangkitnya, digunakan tanda panah dua arah, tetapi tanda ini tidak memiliki makna khusus.

$$g_0, g_1, g_2, \cdots \leftrightarrow g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + g_3 x^3 + \cdots$$

Sebagai contoh,

$$\begin{aligned}
0,0,0,0,\cdots &\leftrightarrow 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + \cdots = 0 \\
1,0,0,0,\cdots &\leftrightarrow 1 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + \cdots = 1 \\
3,2,1,0,\cdots &\leftrightarrow 3 + 2x + 1x^2 + 0x^3 + \cdots = 3 + 2x + x^2
\end{aligned}$$

Pola yang terlihat di sini cukup sederhana: suku ke-*i* di dalam barisan dengan indeks yang dimulai dari 0, adalah koefisien dari x^i dalam fungsi pembangkitnya. Seperti diketahui, jumlah dari suatu deret geometri tak hingga adalah

$$1+x+x^2+x^3+\cdots=\frac{1}{1-x} \tag{5.52}$$

Persamaan (5.8) tidak berlaku untuk $|x|\geq 1$. Tetapi untuk kasus ini tidak akan bertentangan dengan masalah konvergensi. Rumus ini merupakan bentuk fungsi pembangkit dari barisan. Misalnya

$$\begin{aligned}
&1,1,1,1,... &&\leftrightarrow 1+x+x^2+x^3+\cdots &&=\frac{1}{1-x}\\
&1,-1,1,-1,\cdots &&\leftrightarrow 1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots &&=\frac{1}{1+x}\\
&1,a,a^2,a^3,\cdots &&\leftrightarrow 1+ax+a^2x^2+a^3x^3+\cdots &&=\frac{1}{1-ax}\\
&1,0,1,0,1,0,\cdots &&\leftrightarrow 1+x^2+x^4+x^6+\cdots &&=\frac{1}{1-x^2}
\end{aligned}$$

Salah satu bentuk barisan yang paling sederhana adalah 1, 1, 1, …. Fungsi pembangkit dari barisan ini berbentuk

$$G(x)=1+x+x^2+x^3+\cdots \tag{5.53}$$

yang dengan mudah dinyatakan dalam bentuk fungsi dasar. Jika fungsi *G*(*x*) dikalikan dengan *x*, akan diperoleh

$$\begin{aligned}
xG(x) &= x+x^2+x^3+\cdots\\
&= G(x)-1\\
1 &= G(x)(1-x)
\end{aligned}$$

Karena itu

$$G(x)=\frac{1}{1-x} \tag{5.54}$$

Setelah disesuaikan, maka argumen yang sama berlaku juga untuk sebarang barisan yang berbentuk $a, ar, ar^2, ar^3, \cdots$

$$\begin{aligned}
G_{a,r}(x) &= a+arx+ar^2x^2+ar^3x^3+\cdots\\
&= a(1+(rx)+(rx)^2+(rx)^3+\cdots),
\end{aligned}$$

dimana $rxG_{a,r}(x)=G_{a,r}(x)-a$

dan

$$G_{a,r}(x)=\frac{a}{1-rx} \tag{5.55}$$

Perhitungan di atas adalah diferensiasi rumus jumlah dari suatu deret geometri. Tentu saja, hasilnya konsisten dengan definisi fungsi pembangkit $(1-x)^{-1}$.

Polinomial $1+x+x^2+x^3+x^4+x^5$ dalam persamaan (5.5), (5.6), dan (5.7) dapat dituliskan dalam bentuk $\frac{x^6-1}{x-1}$. Hal ini dapat dibuktikan dengan perkalian silang maupun dengan metode pembagian panjang. Pada masalah ini, $f(x)=\frac{x^6-1}{x-1}$ dinamakan fungsi pembangkit dari barisan koefisien-koefisien 1, 1, 1, 1, 1, 1 dalam polinomial tersebut di atas. Secara umum, fungsi pembangkit didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 5.2. Misalkan $a_0, a_1, a_2, \cdots$ adalah barisan bilangan-bilangan real, maka fungsi

$$g(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n \tag{5.56}$$

adalah fungsi pembangkit dari barisan $\{a_n\}$.

Fungsi pembangkit dari barisan berhingga $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ dapat juga didefinisikan dengan memisalkan $a_i = 0$ untuk $i > n$; karena itu $g(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ adalah fungsi pembangkit dari barisan berhingga $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$.

Sebagai contoh,

$$g(x)=1+2x+3x^2+\cdots+(n+1)x^n+\cdots$$

adalah fungsi pembangkit dari barisan bilangan bulat positif, dan

$$f(x)=1+3x+6x^2+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}x^2+\cdots$$

adalah fungsi pembangkit dari barisan bilangan triangular. Karena

$$\frac{x^n-1}{x-1}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1},$$

maka

$$g(x)=\frac{x^n-1}{x-1} \tag{5.57}$$

adalah fungsi pembangkit dari barisan *n* satuan.

Contoh 5.1: Seorang ibu membeli 12 buah jeruk untuk dibagikan kepada tiga orang anaknya, Grace, Mery, dan Frans. Ibu akan membagikan kedua belas jerus tersebut sedemikian sehingga Grace mendapat sekurang-kurangnya empat jeruk, Mery dan Frans masing-masing memperoleh sekurang-kurangnya dua buah jeruk, tetapi Frans tidak boleh mendapat lebih dari lima buah jeruk. Tabel 5.1 di bawah ini menunjukkan semua kemungkinan cara membagikan jeruk dengan syarat batas yang disebutkan di atas.

Grace	Mery	Frans		Grace	Mery	Frans
4	3	5		6	2	4
4	4	4		6	3	3
4	5	3		6	4	2
4	6	2		7	2	3
5	2	5		7	3	2
5	3	4		8	2	2
5	4	3				
5	5	2				

Tabel 5.1. Pembagian 12 jeruk

Dari Tabel 5.1, diperoleh semua selesaian bulat dari persamaan $c_1 + c_2 + c_3 = 12$, dengan $4 \le c_1; 2 \le c_2;$ dan $2 \le c_3 \le 5.$ Dari kedua kasus cara pembagian jumlah jeruk dalam Tabel 5.1, didapatkan penyelesaian 4 + 3 + 5 = 12 dan 4 + 4 + 4 = 12. Kapankah hal seperti ini terjadi? Pada perkalian polinomial pangkat dari variabel dijumlahkan dengan pangkat dari variabel lainnya. Masalah dalam contoh di atas dapat diselesaikan dengan perkalian tiga polinomial, yaitu:

$$\left(x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8\right)\left(x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6\right)\left(x^2 + x^3 + x^4 + x^5\right)$$

Dua cara memperoleh x^{12} adalah sebagai berikut:

1. $x^{12} = x^4x^3x^5$ (tabel sebelah kiri),

   x^4 diperoleh dari $\left(x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8\right)$,

   x^3 diperoleh dari $\left(x^2 + x^3 + x^4 + x^5\right)$, dan

   x^5 diperoleh dari $\left(x^2 + x^3 + x^4 + x^5\right)$.
2. $x^{12} = x^4x^4x^4$, masing-masing x^4 diperoleh dari masing-masing polinomial yang diperkalikan.

Dari perkalian

$$\left(x^4+x^5+x^6+x^7+x^8\right)\left(x^2+x^3+x^4+x^5+x^6\right)\left(x^2+x^3+x^4+x^5\right)$$

dapat diketahui hasilkali $x^i x^j x^k$ untuk setiap (i, j, k) pada Tabel 1. Jadi koefisien x^{12} dalam

$$\begin{aligned} f(x) = \quad & (x^4+x^5+x^6+x^7+x^8)x \\ & (x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)x \\ & (x^2+x^3+x^4+x^5) \end{aligned}$$

menyatakan banyaknya cara pendistribusian (pembagian jeruk) kepada ketiga anak, yaitu sebanyak 14 cara. Fungsi $f(x)$ dinamakan *fungsi pembangkit* untuk masalah pendistribusian jeruk tadi. Tetapi dari mana munculnya faktor-faktor dalam perkalian ini? Faktor $(x^2+x^3+x^4+x^5)$ misalnya, menyatakan bahwa ibu dapat memberikan 4 atau 5 atau 6 atau 7 atau 8 buah jeruk kepada Grace. Koefisien masing-masing pangkat *x* adalah 1 karena diasumsikan bahwa buah jeruk merupakan **benda yang identik**. Artinya, hanya terdapat satu cara untuk memberikan empat jeruk kepada Grace, hanya satu cara untuk memberikannya lima jeruk, hanya satu cara untuk memberikannya enam jeruk, dan seterusnya, demikian pula untuk Mery dan Frans. Karena Mery dan Frans masing-masing harus mendapatkan paling sedikit dua buah jeruk, maka kedua polinomial lainnya $\left(x^2+x^3+x^4+x^5+x^6\right)$ dan $\left(x^2+x^3+x^4+x^5\right)$ dimulai dengan suku x^2, sedang untuk Frans berakhir pada x^5 karena Frank hanya boleh mendapatkan paling banyak 5 buah jeruk (mengapa Mery kita akhiri dengan x^6?).

Sekarang kita dapat memastikan bahwa koefisien dalam $f(x)$ merupakan penyelesaian masalah dari pembagian keduabelas buah jeruk. Meskipun demikian mungkin sebagian mahasiswa memandang bahwa menyusun daftar seperti pada Tabel 5.1 lebih mudah dari pada memperkalikan tiga faktor polinomial atau menghitung koefisien x^{12} dari $f(x)$. Untuk masalah yang sederhana seperti di atas, pernyataan tersebut mungkin benar. Tetapi untuk masalah yang mengandung lebih banyak variabel atau lebih banyak objek untuk didistribusikan, fungsi pembangkit akan lebih banyak berguna. Untuk itu kita akan membahas beberapa contoh.

Contoh 5.2. Misalkan terdapat tak hingga banyaknya gula-gula yang berwarna merah, hijau, putih, dan hitam (atau sekurang-kurangnya 24 biji untuk masing-masing jenis warna), berapakah banyaknya cara yang dapat dilakukan Darius untuk memilih 24 biji dari gula-gula ini sedemikian sehingga terpilih gula-gula yang berwarna putih berjumlah genap dan sekurang-kurangnya enam biji gula-gula berwarna hitam?

Jawab. Polinomial yang berkaitan dengan warna gula-gula tersebut dapat dijelaskan sebagai berikut:

- Merah: $\left(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{24}\right)$, dimana angka 1 pertama menyatakan $1x^0$, karena hanya ada 1 kemungkinan tidak terpilihnya gula-gula berwarna merah.
- Hijau: $\left(1+x^2+x^4+x^6+\cdots+x^{24}\right)$ dimana angka 1 pertama menyatakan $1x^0$, karena hanya ada 1 kemungkinan tidak terpilihnya gula-gula berwarna hijau.
- Putih: $\left(1+x^2+x^4+x^6+\cdots+x^{24}\right)$
- Hitam: $\left(x^6+x^7+x^8+\cdots+x^{24}\right)$

Jadi jawaban masalah yang dihadapi Darius adalah koefisien x^{12} dalam fungsi pembangkit yang dinyatakan sebagai berikut:

$$f(x)= \left(1+x+x^2+\cdots x^{24}\right)^2\left(1+x^2+x^4+\cdots+x^{24}\right)\left(x^6+x^7+x^8+\cdots+x^{24}\right)$$

Salah satu cara untuk mengambil gula-gula dengan syarat-syarat di atas adalah dengan memilih lima gula-gula merah, tiga warna hijau, delapan warna putih, dan delapan warna hitam. Dan ini diperoleh dari x^5 pada polinomial pertama, x^3 dari polinomial kedua, dan x^8 dari dua polinomial terakhir.

Contoh 5.3. Berapa banyak solusi bilangan bulat dari persamaan

$$c_1+c_2+c_3+c_4=25$$

jika $0\le c_i$ untuk semua $1\le i\le 4$?

Jawab. Penyelesaian masalah ini sama saja dengan penyelesaian dari pertanyaan "ada berapa cara membagikan 25 butir kelereng kepada empat orang anak?". Dalam hal ini masing-masing anak akan diberi kelereng tetapi banyaknya kelereng yang diberikan tidak harus sama. Kemungkinan cara membagikan kelereng tersebut dinyatakan dengan polinomial

$$1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{25}.$$

Penyelesaian masalah ini adalah koefisien x^{25} dalam fungsi pembangkit

$$f(x)=(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{25})^4.$$

Penyelesaian masalah ini juga dapat ditentukan dengan mencari koefisien x^{25} dalam fungsi pembangkit

$$f(x)=(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{26}+x^{27}+\cdots)^4$$

meskipun koefisien dari $x^{26},x^{27},\cdots$ tidak pernah digunakan. Mengapa suku tersebut perlu dimasukkan juga? Karena seringkali lebih mudah menyelesaikan masalah dengan menggunakan deret pangkat dari pada menggunakan polinomial.

Contoh 5.4. Untuk sebarang bilangan $n\in\mathbb{Z}^+$

$$(1+x)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\cdots+\binom{n}{n}x^n$$

sehingga $(1+x)^n$ adalah fungsi pembangkit dari barisan

$$\binom{n}{0},\binom{n}{1},\binom{n}{2},\cdots,\binom{n}{n},0,0,0,\cdots.$$

Contoh 5.5:

a) Untuk setiap $n\in\mathbb{Z}^+$,

   $$\left(1-x^{n-1}\right)=(1-x)\left(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n\right)$$

   sehingga $\dfrac{1-x^{n-1}}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n$ dan $\dfrac{1-x^{n-1}}{1-x}$ adalah fungsi pembangkit dari barisan $1,1,1,1,\cdots,1,0,0,0,$ dimana $n+1$ suku pertama adalah 1.

b) Dari bagian (a) di atas,

   $$1=(1-x)(1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots),$$

   sehingga $\dfrac{1}{1-x}$ adalah fungsi pembangkit dari barisan

   $1,1,1,1,\cdots$. Perhatikan bahwa

   $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots$ berlaku untuk semua bilangan real *x* dengan $|x|<1$.

c) Dengan $\dfrac{1}{x}=1+x+x^2+x^3+\cdots=\sum_{i=0}^{\infty}x^i$ diperoleh turunan sebagai berikut:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{d}{dx}(1-x)^{-1}$$
$$=(-1)(1-x)^{-2}(-1)$$
$$=\frac{1}{(1-x)^2}$$
$$=\frac{d}{dx}\left(1+x+x^2+x^3+\cdots\right)$$
$$=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots$$

dengan demikian $1/(1-x)^2$ adalah fungsi pembangkit dari $1,2,3,\cdots$ sedangkan $\frac{x}{(1-x)^2}=0+1x+2x^2+3x^3+4x^4+\cdots$ adalah fungsi pembangkit dari barisan $0,1,2,3,\cdots$.

d) Jika (c) dilanjutkan lagi,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)=\frac{d}{dx}\left(0+x+2x^2+3x^3+4x^4+\cdots\right),\text{ atau}$$

$\frac{x+1}{(1-x)^3}=1+2^2x+3^2x^2+4^2x^3+\cdots$. Oleh karena itu

$\frac{x+1}{(1-x)^3}$ adalah fungsi pembangkit dari $1,2^2,3^2,4^2,\cdots$

dan $\frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$ adalah fungsi pembangkit dari $0,1^2,2^2,3^2,4^2,\cdots$

e) Selanjutnya dengan menggunakan notasi yang berbeda,

$$f_0(x)\quad=\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots$$
$$f_1(x)\quad=x\frac{d}{dx}f_0(x)=\frac{x}{(1-x)^2}=0+x+2x^2+3x^3+\cdots$$
$$f_2(x)\quad=x\frac{d}{dx}f_1(x)=\frac{x^2+x}{(1-x)^3}=0^2+1^2x+2^2x^2+3^2x^3+\cdots$$
$$f_3(x)\quad=x\frac{d}{dx}f_2(x)=\frac{x^3+4x^2+x}{(1-x)^4}=0^3+1^3x+2^3x^2+3^3x^3+\cdots$$
$$f_4(x)\quad=x\frac{d}{dx}f_3(x)=\frac{x^4+11x^3+11x^2+x}{(1-x)^5}=0^4+1^4x+2^4x^2+\cdots$$

Contoh 5.6.

a) Misalkan suatu fungsi $\frac{1}{1-y}=1+y+y^2+y^3+\cdots$ dibentuk fungsi lain dengan mensubtitusikan *y* menjadi 2*x*, maka akan diperoleh:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-2x} &= 1+(2x)+(2x)^2+(2x)^3+\cdots \\ &= 1+2x+2^2x^2+2^3x^3+\cdots\end{aligned}$$

Jadi $1/(1-2x)$ adalah fungsi pembangkit dari barisan $1(=2^0),2(=2^1),2^2,2^3,\cdots$.

Faktanya, untuk setiap $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-ax} &= 1+(ax)+(ax)^2+(ax)^3+\cdots \\ &= 1+ax+a^2x^2+a^3x^3+\cdots\end{aligned}$$

Jadi $1/(1-ax)$ adalah fungsi pembangkit untuk barisan $1,a,a^2,a^3,\cdots$

b) Telah diketahui dari contoh sebelumnya bahwa fungsi pembangkit dari barisan $1,1,1,1,\cdots$ adalah $f(x)=1/(1-x)$. Oleh karena itu,

$$g(x)=f(x)-x^2=\frac{1}{1-x}-x^2$$

adalah fungsi pembangkit dari barisan $1,1,0,1,1,\cdots$ sedangkan fungsi

$$h(x)=f(x)+2x^3=\frac{1}{1-x}+2x^3$$

adalah fungsi pembangkit untuk barisan $1,1,3,1,1,\cdots$

c) Dapatkah contoh tersebut di atas digunakan untuk menentukan fungsi pembangkit dari barisan 0, 2, 6, 12, 20, 30, 42, ...?.

Dapat diselidiki bahwa

$$\begin{aligned}a_0 &= 0 = 0^2+0 \\ a_1 &= 2 \quad = 1^2+1 \\ a_2 &= 6 \quad = 2^2+2 \\ a_3 &= 12 \quad = 3^2+3 \\ a_4 &= 20 \quad = 4^2+4, \\ &\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_n &\qquad = n^2+n, \text{ untuk setiap } n \geq 0.\end{aligned}$$

Dengan memperhatikan contoh 5 bagian (c) dan (d), diketahui bahwa

$$\frac{x(x+1)}{(1+x)^3}+\frac{x}{(1+x)^2}=\frac{x(x+1)+x(1-x)}{(1+x)^3}=\frac{2x}{(1+x)^3}$$

adalah fungsi pembangkit untuk barisan yang disebutkan di atas. Penyelsaian ini tergantung pada kemampuan seseorang untuk menemukan masing-masing a_n sebagai jumlah n^2 dan *n*. Jika pola ini tidak dapat ditemukan maka kemungkinan masalah yang diberikan tidak dapat diselesaikan.

Contoh 5.7: Tentukanlah koefisien x^{15} dari

$$f(x) = (x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)^4$$

Penyelesaian:

Karena $(x^2 + x^3 + x^4 + \cdots) = x^2(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) = \dfrac{x^2}{1-x}$, maka koefisien x^{15} dalam fungsi $f(x)$ tersebut di atas adalah koefisien x^{15} dalam

$$\left(\frac{x^2}{1-x}\right)^4 = \left(\frac{x^8}{(1-x)^4}\right),$$

yaitu koefisien x^7 dalam $(1-x)^{-4}$, yang dinyatakan dengan koefisien binomial yaitu

$$\binom{-4}{7}(-1)^7 = (-1)^7\binom{4+7-1}{7}(-1)^7 = \binom{10}{7} = 120.$$

Contoh 5.8: Tentukanlah koefisien dari x^{15} dalam

$$f(x) = (x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)^4.$$

Jawab: Karena $(x^2 + x^3 + x^4 + \cdots) = x^2(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) = x^2/(1-x)$, maka koefisien dari x^{15} dalam $f(x) = (x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)^4$ adalah koefisien dari x^{15} di dalam $\left(x^2/(1-x)\right)^4 = x^8/(1-x)^4$. Dengan demikian koefisien yang dicari sama dengan koefisien dari x^7 di dalam $(1-x)^{-4}$ yaitu

$$\binom{-4}{7}(-1)^7 = (-1)^7\binom{4+7-1}{7}(-1)^7 = \binom{10}{7} = 120.$$

Secara umum, untuk $n \in \mathbb{Z}^+$, koefisien dari x^n di dalam fungsi $f(x) = 0$ jika $0 \le n \le 7$. Untuk semua $n \ge 8$, koefisien dari x^n di dalam $f(x)$ adalah koefisien dari x^{n-8} di dalam $(1-x),^{-4}$ yaitu

$$\binom{-4}{n-8}(-1)^{n-8}=\binom{n-5}{n-8}.$$

Contoh 5.9: Sekali lagi akan diperjelas tentang masalah pencacahan komposisi dari suatu bilangan bulat positif *n* dengan menggunakan fungsi pembangkit. Diketahui bahwa

$$\frac{x}{1-x}=x+x^2+x^3+x^4+\cdots$$

dimana koefisien dari x^4 adalah 1 untuk komposisi 1 elemen jumlahan dari 4, yaitu 4. Untuk mengetaui banyaknya komposisi dari *n* yang terdiri ayas dua elemen jumlahan, maka kita harus mengetahui koefisien x^n di dalam

$$\left(x+x^2+x^3+\cdots\right)^2=\left[x/(1-x)\right]^2=x^2/(1-x)^2.$$

Pada contoh ini, didapatkan x^4 di dalam $\left(x+x^2+x^3+\cdots\right)^2$ dari hasil perkalian $x^1x^3, x^2x^2, \text{dan } x^3x^1.$ Jadi koefisien dari x^4 di dalam $x^2/(1-x)^2$ adalah 3 – yaitu banyakanya komposisi jumlahan dua elemen yang menghasilkan 4, yaitu 1+3, 2+2, dan 3+1. Selanjutnya komposisi tiga jumlahan dapat dijumpai dalam bentuk

$$\left(x+x^2+x^3+\cdots\right)^3=\left[x/(1-x)\right]^3=x^3/(1-x)^3.$$

Sekali lagi dapat diperhatikan dari mana x^4 berasal – yaitu dari perkalian $x^1x^1x^2, x^1x^2x^1, \text{dan } x^2x^1x^1.$ Di sini, koefisien dari x^4 adalah 3, yang merupakan banyaknya komposisi jumlahan 4 yaitu 1+1+2, 1+2+1, dan 2+1+1. Akhirnya koefisien dari x^4 di dalam fungsi

$$f(x)=\left(x+x^2+x^3+x^4+\cdots\right)^4=\left[x/(1-x)\right]^4=x^4/(1-x)^4$$

ada 1, yaitu komposisi jumlahan 4 elemen yang jumlahnya 4, yaitu 1+1+1+1, masing-masing hanya dapat muncul dari x^1.

Hasil yang diperoleh di atas menunjukkan bahwa koefisien dari x^4 di dalam $\sum_{i=1}^{4}\left[x/(1-x)\right]^i$ adalah 1+3+3+1=8$\left(=2^3\right)$, yaitu komposisi jumlahan 4 elemen. Bilangan ini juga merupakan koefisien dari x^4 di dalam $\sum_{t=1}^{\infty}\left[x/(1-x)\right]^t$. Dengan analogim, dapat diketahui bahwa banyaknya komposisi dari suatu bilangan bulat positif *n* adalah koefisien x^n di dalam fungsi pembangkit

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[x/(1-x) \right]^i.$$

Tetapi jika dimisalkan $y = x/(1-x)$, maka akan diperoleh

$$\begin{aligned} f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} y^i \quad &= y\sum_{i=0}^{\infty} y^i = y\left(\frac{1}{1-y}\right) = \left(\frac{x}{1-x}\right)\left[\frac{1}{1-\left(\frac{x}{1-x}\right)}\right] = \left(\frac{x}{1-x}\right)\left[\frac{1}{\frac{1-x-x}{1-x}}\right] \\ &= x/(1-2x) = x\left[1+(2x)+(2x)^2+(2x)^3+\cdots\right] \\ &= 2^0 x + 2^1 x^2 + 2^2 x^3 + 2^3 x^4 + \cdots. \end{aligned}$$

Jadi, banyaknya komposisi bilangan bulat positif *n* merupakan koefisien dari x^n (yaitu 2^{n-1}) di dalam $f(x)$.

Tabel 5.2.

Untuk semua $m, n \in \mathbb{Z}^+, a \in \mathbb{R}$,

1). $(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x^1 + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n$

2). $(1+ax)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}ax^1 + \binom{n}{2}a^2x^2 + \cdots + \binom{n}{n}a^n x^n$

3). $(1+x^m)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x^m + \binom{n}{2}x^{2m} + \cdots + \binom{n}{n}x^{nm}$

4). $(1-x^{n+1})/(1-x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$

5). $1/(1-x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} x^i$

6). $$\begin{aligned} 1/(1-ax) \quad &= 1 + (ax) + (ax)^2 + (ax)^3 + \cdots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (ax)^i = \sum_{i=0}^{\infty} a^i x^i \\ &= 1 + ax + a^2x^2 + a^3x^3 + \cdots \end{aligned}$$

7). $$\begin{aligned} 1/(1+x)^n \quad &= \binom{-n}{0} + \binom{-n}{1}x + \binom{-n}{2}x^2 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-n}{i} x^i \\ &= 1 + (-1)\binom{n+1-1}{1}x + (-1)^2\binom{n+2-1}{1}x^2 + \cdots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{n+i-1}{i} x^i \end{aligned}$$

$$8).\quad 1/(1-x)^n = \binom{-n}{0} + \binom{-n}{1}(-x) + \binom{-n}{2}(-x)^2 + \cdots$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-n}{i}(-x)^i$$

$$= 1 + (-1)\binom{n+1-1}{1}(-x) + (-1)^2\binom{n+2-1}{1}(-x)^2 + \cdots$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n+i-1}{i} x^i$$

Jika $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$, dan $h(x) = f(x)g(x)$,

maka $h(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$, dimana untuk semua $k \ge 0$,

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + a_2 b_{k-2} + \cdots + a_{k-1} b_1 + a_k b_0 = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$$

Contoh 5.10: Ada berapa cara seorang kapten polisi membagikan 24 rompi kepada 4 orang anggotanya sedemikian sehingga masing-masing anggota polisi tersebut mendapatkan sekurang-kurangnya 3 rompi, tetapi tidak lebih dari 8?

Jawab: Kemungkinan banyaknya rompi yang akan dibagikan kepada masing-masing anggota polisi adalah $x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8$. Karena rompi akan dibagikan kepada 4 orang anggota polisi maka fungsi pembangkitnya dapat dirumuskan:

$$f(x) = (x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8)^4.$$

Pada contoh ini, akan ditentukan koefisien x^{24} di dalam $f(x)$. Dengan

$$\left(x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8\right)^4 = x^{12}\left(1 + x + x^2 + \cdots + x^5\right)^4$$

$$= x^{12}\left(\left(1-x^6\right)/(1-x)\right)^4,$$

Berarti koefisien yang dicari adalah koefisien x^{12} dari $(1-x^6)^4$.

$$(1-x)^{-4} = \left[1 - \binom{4}{1}x^6 + \binom{4}{2}x^{12} - \binom{4}{3}x^{18} + \binom{4}{4}x^{24}\right]x$$

$$\left[\binom{-4}{0} + \binom{-4}{1}(-x) + \binom{-4}{2}(-x)^2 + \cdots\right],$$

yaitu

$$\left[\binom{-4}{12}(-1)^{12}-\binom{4}{1}\binom{-4}{6}(-1)^{6}+\binom{4}{2}\binom{-4}{0}\right]=\left[\binom{15}{12}-\binom{4}{1}\binom{9}{6}+\binom{4}{2}\right]=125.$$

Contoh 5.11: Tentukanlah koefisien x^8 dari $\dfrac{1}{(x-3)(x-2)^2}$.

Jawab: Karena untuk sebarang $a \neq 0$,

$$\frac{1}{x-a}=\frac{-1}{a}\left(\frac{1}{1-\frac{x}{a}}\right)=\frac{-1}{a}\left[1+\frac{x}{a}+\left(\frac{x}{a}\right)^2+\cdots\right]$$

maka soal ini dapat diselesaikan dengan mencari koefisien x^8 dari fungsi

$$\frac{1}{\left[(x-3)(x-2)^2\right]}$$

yang dapat dinyatakan dengan

$$\frac{-1}{3}\left[1+\frac{x}{3}+\left(\frac{x}{3}\right)^2+\cdots\right]\frac{1}{4}\left[\binom{-2}{0}+\binom{-2}{1}\left(\frac{-x}{2}\right)+\binom{-2}{2}\left(\frac{-x}{2}\right)^2+\cdots\right].$$

Teknik lain yang dapat digunakan untuk menyelesaikan contoh tersebut di atas adalah dengan menggunakan dekomposisi pecahan parsial:

$$\frac{1}{(x-3)(x-2)^2}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}.$$

Dekomposisi ini menunjukkan bahwa:

$$1=A(x-2)^2+B(x-2)(x-3)+C(x-3),$$

atau

$$0\cdot x^2+0\cdot x+1=1$$

$$=(A+B)x^2+(-4A-5B+C)x+(4A+6B-3C)$$

Dengan membandingkan koefisien-koefisien dari $x^2, x, \text{dan } 1$ berturut-turut, diperoleh bentuk aljabar

$$A+B \quad = 0$$

$$-4A-5B+c \quad = 0$$

dan

$$4A+6B-3C \quad = 1$$

Dengan menyelesaikan bentuk ini diketahui bahwa

$$A = 1, B = -1, \text{dan } C = -1.$$

Oleh karena itu

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(x-3)(x-2)^2} &= \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2} - \frac{1}{(x-2)^2} \\
&= \left(\frac{-1}{3}\right)\frac{1}{1-(x/3)} + \left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{1-(x/2)} + \left(\frac{-1}{4}\right)\frac{1}{\left(1-(x/2)\right)^2} \\
&= \left(\frac{-1}{3}\right)\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^i + \left(\frac{1}{2}\right)\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^i \\
&\quad + \left(\frac{-1}{4}\right)\left[\binom{-2}{0} + \binom{-2}{1}\left(\frac{-x}{2}\right) + \binom{-2}{2}\left(\frac{-x}{2}\right)^2 + \cdots\right].
\end{aligned}$$

Koefisien x^8 adalah

$$\begin{aligned}
&(-1/3)(1/3)^8 + (1/2)(1/2)^8 + (-1/4)\binom{-2}{8}(-1/2)^8 \\
&= -\left[(1/3)^9 + 7(1/2)^{10}\right].
\end{aligned}$$

B.2. Barisan Fibonacci

Barisan Fibonacci yang terkenal didefinisikan berdasarkan dua suku pertamanya yaitu $f_0 = f_1 = 1$ dan hubungan

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \tag{5.58}$$

Berdasarkan hubungan-hubungan ini, mahasiswa dapat dengan mudah menemukan beberapa suku pertama dari barisan Fibonacci yaitu

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, …

yang dimulai dari f_2 dapat dilihat bahwa barisan ini terbentuk sebagai jumlahan dua suku sebelumnya. Untuk menentukan fungsi pembangkit

$$F(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + \cdots \tag{5.59}$$

maka kedua sisi dari persamaan (5.9) dikalikan dengan $(x + x^2)$.

$$\begin{aligned}
(x+x^2)F(x) &= x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + \cdots \\
&\qquad\; + x^2 + x^3 + 2x^4 + 3x^5 + \cdots \\
&= x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + \cdots
\end{aligned}$$

atau

$$(x + x^2)F(x) = F(x) - 1,$$

sehingga diperoleh

$$F(x)(1-x-x^2)=1 \Leftrightarrow F(x)=\frac{1}{1-x-x^2} \tag{5.60}$$

Persamaan (5.10) dapat dipandang sebagai komposisi dua fungsi pembangkit yaitu $(1-x)^{-1}$ dan $x+x^2$, yaitu

$$F(x)=1+(x+x^2)+(x+x^2)^2+(x+x^2)^3+\cdots$$

Penjabaran ini tidak terlalu tepat, karena faktor penjumlah di ruas kanan mengandung pangkat *x* yang berbeda, sehingga rumusan eksplisit menjadi rumit. Representasi pernyataan (2.6) lebih bermanfaat jika dinyatakan sebagai jumlah dari dua pecahan dasar:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x^2} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x-x_2}-\frac{1}{x-x_1}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x_1\left(1-\frac{x}{x_1}\right)}-\frac{1}{x_2\left(1-\frac{x}{x_2}\right)}\right),\end{aligned}$$

dimana $x_1=(-1+\sqrt{5})/2$ dan $x_2=(-1-\sqrt{5})/2$ adalah akar-akar dari persamaan kuadrat $1-x-x^2=0.$ Penjabaran ini menunjukkan bahwa

$$F(x) \quad = \frac{1}{\sqrt{5}x_1}\left(1+\frac{x}{x_1}+\frac{x^2}{x_1^2}+\cdots\right)-\frac{1}{\sqrt{5}x_2}\left(1+\frac{x}{x_2}+\frac{x^2}{x_2^2}+\cdots\right)$$

Jadi,

$$\begin{aligned}f_n &= \frac{1}{\sqrt{5}}(x_1^{-1-n}-x_2^{-1-n})\\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{5}}(x_1^{n+1}-x_2^{n+1})\\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)\end{aligned} \tag{5.61}$$

B.3. Mencari Fungsi Pembangkit

Mahasiswa tentu masih mengingat definisi bilangan Fibonacci yang dijabarkan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}&f_0=0\\ &f_1=1\\ &f_n=f_{n-1}+f_{n-2} \quad \text{untuk } n\ge 2.\end{aligned}$$

Dengan menjabarkan f_n menjadi barisan tak hingga persamaan, maka bilangan Fibonacci terdefinisi menjadi

$$\begin{aligned} f_0 &= 0 \\ f_1 &= 1 \\ f_2 &= f_1 + f_0 \\ f_3 &= f_2 + f_1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Tujuan utamanya adalah menetapkan suatu fungsi $F(x)$ yang membangkitkan barisan sebelah kiri dari masing-masing lambang kesamaan, yaitu bilangan-bilangan Fibonacci. Selanjutnya kita menurunkan suatu fungsi yang membangkitkan barisan pada ruas kanan. Akhirnya kita menyamakan kedua ruas tersebut dan menentukan $F(x)$.

$$F(x) = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + f_3 x^3 + \cdots.$$

Sekarang akan diturunkan suatu fungsi pembangkit dari barisan:

$$0, 1, f_1 + f_0, f_2 + f_1, f_3 + f_2, \cdots.$$

Salah satu cara yang dapat dilakukan adalah dengan memecah bentuk ini ke dalam penjumlahan tiga barisan kemudian menerapkan aturan penjumlahan.

$$\begin{array}{cccccccr} 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & \cdots & \leftrightarrow & x \\ 0, & f_0, & f_1, & f_2, & f_3, & \cdots & \leftrightarrow & xF(x) \\ 0, & 0, & f_0, & f_1, & f_2, & \cdots & \leftrightarrow & x^2F(x) \\ \hline 0, & 1+f_0, & f_1+f_0, & f_2+f_1 & f_3+f_2 & \cdots & \leftrightarrow & x + xF(x) + x^2F(x) \end{array}$$

Bentuk ini sudah hampir identik dengan ruas kanan dari persamaan Fibonacci, kecuali suku kedua 1 + *f*0. Meskipun demikian, suku ini sama dengan 1 karena $f_0 = 0$. Jika $F(x)$ disetarakan dengan fungsi baru $x + xF(x) + x^2F(x)$, maka semua persamaan yang menyatakan bilangan Fibonacci telah dituliskan secara implisit.

$$\begin{array}{cccccc} F(x) = & f_0 + & f_1 x + & f_2 x^2 + & f_3 x^3 + & \cdots \\ \| & \| & \| & \| & \| & \\ \hline x + xF(x) + x^2F \to x) = & 0 + & (1+f_0) + & (f_1+f_0)x^2 + & (f_2+f_1)x^3 + & \cdots \end{array}$$

$F(x)$ menyatakan fungsi pembangkit dari barisan Fibonacci:

$$F(x) = x + xF(x) + x^2F(x)$$

Jadi,

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}. \tag{5.62}$$

Persamaan (5.16) sangat menarik karena tidak dapat dibayangkan bahwa bilangan Fibonacci adalah koefisien-koefisien dari fungsi yang sederhana. Selain itu, fungsi ini merupakan rasio polinomial sehingga metode pecahan parsial dapat digunakan untuk menentukan bilangan Fibonacci ke-*n*.

B.4. Fungsi Pembangkit Biasa

Pada bagian ini akan dijabarkan beberapa contoh yang melibatkan fungsi pembangkit dan hubungannya dengan masalah-masalah kombinatorik.

Contoh 5.12. Masalah Dadu Galileo

Masalah: Berapa peluang kejadian munculnya mata dadu berjumlah 10 dari percobaan melempar 3 buah dadu (dadu 6 sisi) yang berbeda?

Jawab: Kita tahu bahwa terdapat 6 × 6 × 6 = 216 kemungkinan kejadian pada percobaan melempar 3 buah dadu yang berbeda. Banyaknya cara untuk mendapatkan jumlah mata dadu 10 pada percobaan tersebut sama dengan banyaknya solusi bilangan bulat pada persamaan:

$$X_1 + X_2 + X_3 = 10 \text{ dengan } 1 \le X_i \le 6$$

atau dalam bentuk yang lebih umum

$$X_1 + X_2 + X_3 = r \text{ dengan } 1 \le X_i \le 6$$

Selanjutnya, banyaknya solusi bilangan bulat dari persamaan tersebut adalah koefisien dari x^r dari fungsi pembangkit yang berbentuk

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^3$$

Dengan menggunakan persamaan dari proposisi yang telah disebutkan sebelumnya, maka dapat dituliskan:

$$
\begin{aligned}
\left(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6\right)^3 &= \left(x\left(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5\right)\right)^3 \\
&= x^3\left(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5\right)^3 \\
&= x^3\left[\left(1+x+x^2+\cdots\right)-\left(x^6+x^7+\cdots\right)\right]^3 \\
&= x^3\left[\left(1+x+x^2+\cdots\right)-x^6\left(1+x+\cdots\right)\right]^3 \\
&= x^3\left[\left(1-x^6\right)\left(1+x+x^2+x^3+\cdots\right)\right]^3 \\
&= x^3\left(1-x^6\right)^3\left(1+x+x^2+x^3+\cdots\right)^3 \\
&= x^3\left[\binom{3}{0}x^0-\binom{3}{1}x^6+\binom{3}{2}x^{12}-\binom{3}{3}x^{18}\right]x \\
&\quad \left[\binom{3-1+0}{0}+\binom{3-1+1}{1}x+\binom{3-1+2}{2}x^2+\cdots\right]
\end{aligned}
$$

Dengan demikian, untuk menentukan koefisien dari x^{10} kita hanya perlu mencari koefisien x^7 dalam

$$
\left[\binom{3}{0}x^0-\binom{3}{1}x^6+\binom{3}{2}x^{12}-\binom{3}{3}x^{18}\right]x\left[\binom{3-1+0}{0}+\binom{3-1+1}{1}x+\binom{3-1+2}{2}x^2+\cdots\right]
$$

Suku-suku berpangkat 7 dapat dijumpai dalam bentuk

$$
\binom{3}{0}x^0\binom{3-1+7}{7}x^7-\binom{3}{1}x^6\binom{3-1+1}{1}x
$$

Sehingga koefisien dari x^7 merupakan jumlahan dari kedua kemungkinan suku berpangkat 7 tersebut.

$$
\binom{3}{0}\binom{3-1+7}{7}-\binom{3}{1}\binom{3-1+1}{1}=\frac{3!}{0!3!}\frac{9!}{7!2!}-\frac{3!}{1!2!}\frac{3!}{1!2!}=36-9=27 \qquad (5.63)
$$

Jadi, peluang munculnya mata dadu berjumlah 10 pada percobaan melempar 3 dadu yang berbeda adalah $\frac{27}{216}=\frac{1}{8}$.

Contoh 5.13. Ada berapa cara mendistribusikan *r* bola identik ke dalam *n* keranjang berbeda, dengan syarat tiap keranjang paling banyak berisi 3 bola?

Jawab: Masalah tersebut sama dengan mencari banyaknya solusi bilangan bulat dari persamaan

$$
X_1+X_2+\cdots+X_n=r
$$

dengan $0 \le X_i \le 3$ untuk setiap $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ dan banyaknya solusi bilangan dari persamaan tersebut sama dengan mencari koefisien x^r dari fungsi pembangkit

$$(1 + x + x^2 + x^3)^n$$

Dengan menjabarkan bentuk yang terakhir ini, dapat diketahui bahwa cara mendistribusikan *r* bola identik ke dalam *n* keranjang berbeda, dengan syarat tiap keranjang paling banyak berisi 3 bola, yang ditunjukkan dengan banyaknya koefisien dari x^r. Suku-suku yang mengandung x^r didapatkan dari

$$\binom{n}{0}\binom{n-1+r}{r}x^r, -\binom{n}{1}\binom{n-1+r-4}{r-4}x^{r-4}, \text{dan } \binom{n}{2}\binom{n-1+r-8}{r-8}x^{r-8}$$

dan seterusnya, Sehingga koefisien x^r adalah

$$\binom{n}{0}\binom{n-1+r}{r} - \binom{n}{1}\binom{n-1+r-4}{r-4} + \binom{n}{2}\binom{n-1+r-8}{r-8} \cdots$$

Contoh 5.14. Carilah fungsi pembangkit dari banyaknya penyelesaian bilangan bulat untuk persamaan

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = r$$

dimana

$$1 \le X_1 \le X_2 \le X_3 \le X_4$$

Penyelesaian: Penyelesaian untuk masalah tersebut di atas memiliki syarat yang berpasangan. Untuk itu persamaan di atas diubah menjadi suatu persamaan baru tetapi tetap menggunakan syarat-syarat batas yang sama.

Misalkan:

$$Y_1 = X_1, Y_2 = X_2 - X_1, Y_3 = X_3 - X_2, \text{dan } Y_4 = X_4 - X_3$$

Maka:

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 4Y_1 + 3Y_2 + 2Y_3 + Y_4$$

dimana

$$Y_1 \ge 1 \text{ dan } Y_i \ge 0 \text{ untuk } 2 \le i \le 4$$

Dengan menganggap

$$Z_1 = 4Y_1, Z_2 = 3Y_2, Z_3 = 2Y_3, \text{dan } Z_4 = Y_4$$

maka persamaan

$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = r$ berubah menjadi $Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 = r$

dimana

$Z_1 = 4, 8, 12, \cdots$

$Z_2 = 0, 3, 6, \cdots$

$Z_3 = 0, 2, 4, \cdots$, dan

$Z_4 = 0, 1, 2, 3, \cdots$.

Selanjutnya, fungsi pembangkit untuk $Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 = r$ adalah

$$\left(1 + x + x^2 + \cdots\right)\left(1 + x^2 + x^4 + \cdots\right)\left(1 + x^3 + x^6 + \cdots\right)\left(1 + x^4 + x^8 + \cdots\right)$$

Contoh 5.15. Tentukanlah fungsi pembangkit dari banyaknya cara memperoleh kejadian munculnya mata dadu berjumlah *r* dari percobaan melempar sebarang jumlah dadu.

Jawab: Fungsi pembangkit dari *n* dadu adalah

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^n$$

Analogi dengan bentuk tersebut di atas, maka

Fungsi pembangkit dari 0 dadu adalah $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^0$

Fungsi pembangkit dari 1 dadu adalah $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^1$

Fungsi pembangkit dari 2 dadu adalah $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^2$

Demikian seterusnya, sehingga fungsi pembangkit yang ditanyakan dalam contoh di atas adalah

$$\begin{aligned} &(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^0 + (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^1 \\ &+ (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^2 + \cdots \\ &= 1 + (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^1 + (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^2 + \cdots \end{aligned}$$

Selanjutnya, perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} 1 &= \left(1 + z + z^2 + \cdots\right) - \left(z + z^2 + z^3 + \cdots\right) \\ &= \left(1 + z + z^2 + \cdots\right) - z\left(1 + z + z^2 + \cdots\right) \\ &= (1 - z)\left(1 + z + z^2 + \cdots\right) \end{aligned}$$

Karena $\dfrac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots$ dan $z = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$, maka diperoleh

$$1+(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^1+(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^2+\cdots$$
$$=\frac{1}{1-(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)}$$
$$=\frac{1}{1-x-x^2-x^3-x^4-x^5-x^6}$$

Contoh 5.16. Tuliskan fungsi pembangkit dari barisan-barisan berikut dan sederhanakan jika mungkin!

a). $0,0,0,1,1,1,1,...$ b). $0,0,\frac{1}{2!},\frac{1}{3!},\frac{1}{4!},\cdots$

c). $\frac{1}{3!},\frac{1}{4!},\frac{1}{5!},\cdots$ d). $1,-1,\frac{1}{3!},\frac{1}{4!},\frac{1}{5!},\cdots$

e). $0,1,0,1,0,1,\cdots$ f). $2,0,\frac{2}{3},0,\frac{2}{3},\cdots$

Jawab:

a). $(0,0,0,1,1,1,1,....)$

$$p(x)=0\cdot 1+0\cdot x+0\cdot x^2+1\cdot x^3+1\cdot x^4+1\cdot x^5+1\cdot x^6+\cdots$$
$$=x^3+x^4+x^5+x^6+\cdots$$
$$=(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+\cdots)-(1+x+x^2)$$
$$=1/(1-x)-(1+x+x^2)=(1-1-x-x^2)/(1+x)=(-x-x^2)/(1-x)$$

b). $(0,0,\frac{1}{2!},\frac{1}{3!},\frac{1}{4!},\cdots)$

$$p(x)\ =0.1+0.x+\frac{1}{2!}.x^2+\frac{1}{3!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\cdots$$
$$=\left(\frac{1}{2!}.x^2+\frac{1}{3!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\cdots\right)-(1+x)$$
$$=c^x-(1+x)$$
$$=c^x-x-1$$

$$c).(\frac{1}{3!},\frac{1}{4!},\frac{1}{5!},\cdots)$$

$$\begin{aligned}
p(x) &= \frac{1}{3!}.1+\frac{1}{4!}x+\frac{1}{3!}x^2+\cdots \\
&= \frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}x+\frac{1}{5!}x^2+\cdots \\
&= \frac{x^3}{x^3}\left(\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}x+\frac{1}{5!}x^2+\cdots\right) \\
&= \frac{1}{x^3}\left(\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5+\cdots\right) \\
&= \frac{1}{x^3}\left(1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5+\cdots\right)-\left(1+x+\frac{1}{2!}x^2\right) \\
&= \frac{1}{x^3}\left(e^x-\left(1+x+\frac{1}{2!}x^2\right)\right) \\
&= \frac{1}{x^3}\left(e^x-\frac{1}{2!}x^2-x-1\right)=\frac{1}{x^3}\left(\frac{2e^x-x^2-2x-2}{2}\right) \\
&= \frac{2e^x-x^2-2x-2}{2x^3}
\end{aligned}$$

$$d).(1,-1,\frac{1}{3!},\frac{1}{4!},\frac{1}{5!},\cdots)$$

$$\begin{aligned}
p(x) &= 1.1+(-1.x)+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5\cdots \\
&= x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5+\cdots \\
&= 1+(-2x+x)+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5+\cdots \\
&= -2x+\left(1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5+\cdots\right) \\
&= -2x+e^x \\
&= e^x-2x
\end{aligned}$$

e). $(0,1,0,1,0,1,\cdots)$

$$\begin{aligned}
p(x) &= 0.1+1.x+0.x^2+1.x^3+0x^4+1.x^5+\cdots \\
&= x+x^3+x^5+x^7+\cdots \\
&= \frac{e^x-e^{-x}}{2}
\end{aligned}$$

f). $(2,0,\tfrac{2}{3},0,\tfrac{2}{3},\cdots)$

$$\begin{aligned}
p(x) &= 2.1+0.x+\tfrac{2}{3}x^2+0x^3+\tfrac{2}{3}x^4+\cdots \\
&= 2+\tfrac{2}{3}x^2+\tfrac{2}{3}x^4+\cdots \\
&= 2+\tfrac{2}{3}(x^2+x^4+\cdots) \\
&= 2+\frac{2}{3}\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}-1\right) \\
&= 2+\frac{2}{3}\left(\frac{e^x+e^{-x-2}}{2}\right) \\
&= 2+\frac{1}{3}\left(e^x+e^{-x-2}\right)
\end{aligned}$$

Contoh 5.17.

1. Carilah fungsi pembangkit dari $a_n = 2n+3$
2. Carilah fungsi pembangkit dari $a_n = n^2$
3. Hitunglah $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$

Penyelesaian:

1. Misalkan $g(x)$ adalah fungsi pembangkit dari a_n. Dengan menggunakan definisi 6, fungsi pembangkit dari $a_n = 1$ adalah $g(x)=\dfrac{1}{1-x}$, maka $g'(x)$ adalah

$$g'(x) = -1\cdot(-1)(1-x)^{-1-1} = (1-x)^{-2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

2. Berdasarkan Proposisi 5.4.d, diketahui bahwa jika $g'(x)$ dikalikan dengan *x* maka fungsi pembangkit dari na_n adalah $\dfrac{x}{(1-x)^2}$.Selanjutnya berdasarkan Proposisi 5.4.b, disimpulkan bahwa fungsi pembangkit dari $a_n = 2n+3$ adalah

$$\frac{2x}{(1-x)^2}+\frac{3}{(1-x)}.$$

Karena fungsi pembangkit dari $a_n = n$ adalah $\dfrac{x}{(1-x)^2}$,

Maka

$$g''(x) = \frac{1.(1-x)^2 - 2.(-1)(1-x).x}{\left((1-x)^2\right)^2}$$

$$= \frac{(1-x)^2 + 2x(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{(1-x)\left((1-x)+2x\right)}{(1-x)^4}$$

$$= \frac{(1-x)+2x}{(1-x)^3} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

Dengan menggunakan Proposisi 5.4.d, dan jika $g''(x)$ dikalikan dengan *x*, maka diperoleh kesimpulan bahwa fungsi pembangkit dari na_n adalah $\frac{(x+x^2)}{(1-x)^3}$.

3. Berdasarkan jawaban nomor 2 dan Proposisi 5.4.a, diketahui bahwa fungsi pembangkit dari $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ adalah

$$1^2 x^0 + \left(1^2 + 2^2\right)x^1 + \left(1^2 + 2^2 + 3^2\right)x^2 + \cdots + \left(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\right)x^{n-1} + \cdots$$

$$= \left(1 + x + x^2 + \cdots\right)\left(1^2 + 2^2 x + \cdots + n^2 x^{n-1}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{1-x}\right)\left(\frac{x+x^2}{(1-x)^3}\right) = \frac{x+x^2}{(1-x)^4} = \left(x+x^2\right)\frac{1}{(1-x)^4}$$

$$= \left(x+x^2\right)\left(1+x+x^2+\cdots\right)^4$$

$$= \left(x+x^2\right)\left[\binom{4-1+0}{0} + \binom{4-1+1}{1}x + \binom{4-1+2}{2}x^2 + \cdots\right]$$

$$= \left(x+x^2\right)\left[1 + \binom{4-1+1}{1}x + \binom{4-1+2}{2}x^2 + \cdots\right]$$

Karena penjumlahan, maka koefisien dari x^n adalah

$$\binom{4-1+n-1}{n-1} + \binom{4-1+n-2}{n-2}$$

$$= \binom{n+2}{n-1} + \binom{n+1}{n-2}$$

$$= \frac{(n+2)!}{(n-1)!3!} + \frac{(n+1)!}{(n-2)!3!}$$

$$= \frac{(n+2)(n+1)(n)(n-1)!}{(n-1)!3!} + \frac{(n+1)(n)(n-1)(n-2)!}{(n-2)!3!}$$
$$= \frac{(n+2)(n+1)(n)}{3!} + \frac{(n+1)(n)(n-1)}{3!}$$
$$= \frac{(n+1)(n)\left((n+2)+(n-1)\right)}{6}$$
$$= \frac{(n)(n+1)(2n+1)}{6}$$

Contoh 5.18:

Sederhanakan bentuk $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n}$.

Jawab:

Dari teorema binomial,

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n$$

Turunan pertama terhadap *x* menghasilkan

$$n(1+x)^{n-1} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2}x + \cdots + n\binom{n}{n}x^{n-1}$$

Dengan memilih $x = 1$,

$$n(1+1)^{n-1} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \cdots + n\binom{n}{n}(1)^{n-1} \Leftrightarrow n(2)^{n-1} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \cdots + n\binom{n}{n}$$

Jadi,

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \cdots + n\binom{n}{n} = n(2)^{n-1}$$

Contoh 5.19. Tulis fungsi pembangkit eksponensial dari barisan-barisan berikut dan sederhanakan jika mungkin!

a). $3,3,3,3,\cdots$ b). $0,1,0,1,0,1,\cdots$

c). $3,1,3,1,3,1,\cdots$ d). $\{a_n\} = 3^n$

Jawab.

a). $(3,3,3,3,....)$

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} = 3 + 3x + \frac{3x^2}{2!} + 3\frac{3x^3}{3!} + \cdots = 3\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)$$
$$= 3e^x$$

b). $(0,1,0,1,0,1,0,\ldots)$

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} = 0 + 1.x + 0.\frac{x^2}{2!} + 1.\frac{x^3}{3!} + 0.\frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

$$= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right) - \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots\right)$$

$$= e^x - \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{2e^x - (e^x + e^{-x})}{2}$$

c). $(3,1,3,1,3,1,\ldots)$

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} = 3 + 1.x + 3.\frac{x^2}{2!} + 1.\frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$= 3 + x + 3.\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$= \left(\frac{3 + 3x^2}{2!} + \frac{3x^4}{4!} + \cdots\right) + \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right)$$

$$= 3\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right) + \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right)$$

$$= 3\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)$$

$$= \frac{3e^x + 3e^{-x} + e^x - e^{-x}}{2}$$

$$= \frac{4e^x + 2e^{-x}}{2} = 2e^x + e^{-x}$$

d). $\{a_n\} = 3^n$

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n \frac{x^n}{n!}$$

untuk n $= 0 \Rightarrow a_0 = 3^0 = 1$

n $= 1 \Rightarrow a_1 = 3$

n $= 2 \Rightarrow a_2 = 3^2$

n $= 3 \Rightarrow a_3 = 3^3$

Maka untuk

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} = 1 + 3x + 3^2 \frac{x^2}{2!} + 3^3 \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 3^n \frac{x^n}{n!} = e^{3x}$$

Contoh 5.20. Tulis barisan untuk masing-masing fungsi pembangkit eksponensial berikut dan sederhanakan jika mungkin!

a). $p(x) = \dfrac{x^5}{1-8x}$ b). $p(x) = 2x + e^2$

c). $p(x) = e^x + e^{4x}$ d). $p(x) = \dfrac{e^{3x}}{2-3x}$

e). $p(x) = \dfrac{1+2x+x^2}{e^{3x}}$

Jawab:

a). $p(x) = \dfrac{x^5}{1-8x}$

Definisi fungsi pembangkit biasa:

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

$$a_n = a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots$$

Maka untuk

$$p(x) = \frac{x^5}{1-8x},$$

$$= x^5 - \left(\frac{1}{1-8x}\right)$$

$$= x^5 \left(\sum_{n=0}^{\infty} 8^n x^n\right)$$

$$= x^5 (1 + 8x + 8^2 x^2 + 8^3 x^3 + \cdots)$$

$$= x^5 + 8x^6 + 8^2 x^7 + 8^3 x^8 + \cdots$$

$$a_n = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 8, 8^2, 8^3, \cdots)$$

b). $p(x) = 2x + e^2$

definisi fungsi pembangkit biasa:

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

$$a_n = a_0, a_1 x, a_2 x^2, a_3 x^3, \cdots$$

Maka untuk $p(x) = 2x + e^2$

$$p(x) = 2x + \left(2 + 2x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 + \cdots\right)$$

$$= 2 + 4x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 + \cdots$$

$$a_n = \left(2, 4, \frac{2}{2!}, \frac{2}{3!}, \cdots\right)$$

c). $p(x) = e^x + e^{4x}$

$$= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) + \left(1 + 4x + 4^2\frac{x^2}{2!} + 4^3\frac{x^3}{3!} + \cdots\right)$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} 1\frac{x^n}{n!}\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} 4^n\frac{x^n}{n!}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(1 + 4^n\right)\frac{x^n}{n!}$$

$$a_n = 1 + 4^n$$

$$= (2, 5, 17, 65, \cdots)$$

$$\text{d). } p(x) = \frac{e^{3x}}{2-3x}$$

$$= e^{3x}\left(\frac{1}{2-3x}\right) = e^{3x}(2-3x)^{-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 3^n \frac{x^n}{n!}(2-3x)^{-1}$$

$$= \left(1+3x+3^2\frac{x^2}{2!}+3^3\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)(2-3x)^{-1}$$

$$= (2-3x)+(2-3x)3x+(2-3x)\left(\frac{x^2}{2!}\right)+(2-3x)\left(\frac{x^3}{3!}\right)+\cdots$$

$$= (2-3x+6x-9x^2)+\frac{2x^2}{2!}-\frac{3x^3}{3!}+\cdots$$

$$= 2+3x-\left(9+\frac{2}{2!}\right)x^2+\cdots$$

$$a_n = \left(2,3,9+\frac{2}{2!},\cdots\right)$$

$$\text{e). } p(x) = \frac{1+2x+x^2}{e^{3x}}$$

$$= e^{-3x}(1+2x+x^2)$$

$$= \left(3-3x-\frac{3}{2!}x^2-\frac{3}{3!}x^3-\frac{3}{4!}x^4-\cdots\right)(1+2x+x^2+\cdots)$$

$$= 4-x-\frac{3}{2!}+1x^2-\frac{3}{3!}x^3$$

$$a_n = \left(4,-1,-\frac{3}{2!},-\frac{3}{3!},\cdots\right)$$

B.5. Kesamaan Fungsi Pembangkit

Definisi 5.3. Dua fungsi pembangkit $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dan $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ dikatakan sama jika $a_n = b_n$ untuk setiap $n \geq 0$.

Misalkan

$$f(x)=1+3x+6x^2+10x^3+\cdots$$

dan

$$g(x)=1+\frac{2.3}{2}x+\frac{3.4}{2}x^2+\frac{4.5}{2}x^3+\cdots$$

maka

$$f(x) = g(x)$$

Fungsi pembangkit yang akan sering digunakan di dalam buku ini adalah

$$\frac{1}{1-ax} = 1 + ax + a^2x^2 + \cdots + a^nx^n + \cdots$$

yang jika dipilih $a = 1$ diperoleh bentuk

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

Fungsi pembangkit dapat dijumlahkan dengan cara yang sama dengan penjumlahan polinomial.

B.6. Penjumlahan dan Perkalian Fungsi Pembangkit

Misalkan $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dan $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ adalah dua fungsi pembangkit, maka:

$$f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$$

dan

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} \right) x^n$$

Contoh 5.21. Mencari bentuk deret pangkat dari suatu fungsi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-x)^2} &= \frac{1}{1-x} . \frac{1}{1-x} \\
&= \left(\sum_{i=0}^{\infty} x^i \right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} x^i \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} x^i \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n \\
&= 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots
\end{aligned}$$

dan

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(1-x)^3} &= \frac{1}{1-x}.\frac{1}{(1-x)^2} \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)\left[\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{i=0}^{n} 1.(n+1-i)\right]x^n \\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\left[(n+1)+n+\cdots+1\right]x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2}x^n \\
&= 1+3x+6x^2+10x^3+\cdots
\end{aligned}
$$

Proposisi 5.4.

Misalkan $g(x)$ adalah fungsi pembangkit untuk a_n dan misalkan $h(x)$ adalah fungsi pembangkit untuk b_n.

a. $\frac{g(x)}{(1-x)}$ adalah fungsi pembangkit untuk $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n$

b. $c_1g(x)+c_2h(x)$ adalah fungsi pembangkit untuk $c_1a_n+c_2b_n$ dimana c_1 dan c_2 adalah konstanta.

c. $(1-x)g(x)$ adalah fungsi pembangkit untuk a_n-a_{n-1}

d. $xg'(x)$ adalah fungsi pembangkit dari na_n dimana $g'(x)$ adalah turunan dari fungsi $g(x)$

e. $h(x)g(x)$ adalah fungsi pembangkit dari $a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0$

Bukti:

Misalkan

$$
\begin{aligned}
g(x) &= a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \\
h(x) &= b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\cdots
\end{aligned}
$$

Maka:

b. $\frac{g(x)}{(1-x)} = g(x).\frac{1}{(1-x)}$

$$= \left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots\right)\left(1 + x + x^2 + \cdots\right)$$

$$= a_0 + (a_0 + a_1)x + \cdots + (a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots)x^n + \cdots$$

c. $c_1g(x) + c_2h(x) = c_1\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots\right) +$

$$c_2\left(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n + \cdots\right)$$

$$= (c_1a_0 + c_2b_0) + (c_1a_1 + c_2b_1)x + (c_2a_2 + c_2b_2)x^2 + \cdots$$

d. $(1-x)g(x) = g(x) - xg(x)$

$$= \left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots\right)$$

$$-x\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots\right)$$

$$= \left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots\right)$$

$$-\left(a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + \cdots + a_{n-1}x^n + \cdots\right)$$

$$= a_0 + (a_1 - a_0)x + (a_1 - a_0)x^2 + \cdots + (a_n - a_{n-1})x^n + \cdots$$

e. $g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$

$\Rightarrow g'(x) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots$

$\Rightarrow xg'(x) = a_1x + 2a_2x^2 + \cdots + na_nx^n + \cdots$

f. $h(x)g(x) = \left(b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n + \cdots\right)\left(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \cdots\right)$

$$= b_0a_0 + (b_1a_0 + b_0a_1)x + (b_2a_0 + b_1a_1 + b_0a_2)x^2 + \cdots$$

$$+ (b_na_0 + b_{n-1}a_2 + \cdots b_0a_n)x^n + \cdots$$

$$= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \cdots$$

$$+ (a_0b_n + a_2b_{n-1} + \cdots a_nb_0)x^n + \cdots$$

C. Operasi pada Fungsi Pembangkit

Keistimewaan fungsi pembangkit adalah bahwa semua manipulasi terhadap barisan dapat dilakukan dengan operasi matematika pada fungsi pembangkit yang bersesuaian dengan barisan tersebut. Pembuktian akan dilakukan dengan berbagai operasi dan melihat pengaruhnya terhadap barisan.

C.1. Penskalaan

Mengalikan suatu fungsi pembangkit dengan suatu bilangan konstan akan menggandakan setiap suku di dalam barisan yang bersesuaian dengan fungsi pembangkit tersebut, sesuai dengan konstan pengalinya. Sebagai contoh,

$$1,0,1,0,1,0,\cdots \leftrightarrow 1+x^2+x^4+x^6+\cdots = \frac{1}{1-x^2}.$$

Jika fungsi pembangkitnya dikali dengan dua, maka diperoleh

$$\frac{2}{1-x^2} = 2+2x^2+2x^4+2x^6+\cdots$$

yang menghasilkan barisan 2, 0, 2, 0, 2, 0, . . .

Aturan Skala

Jika

$$f_0, f_1, f_2, \cdots \leftrightarrow F(x),$$

maka

$$\begin{aligned} cf_0, cf_1, cf_3, \cdots \leftrightarrow\ & cf_0 + cf_1 x + cf_2 x^2 + \cdots \\ &= c(f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \cdots) \\ &= cF(x). \end{aligned} \tag{5.64}$$

C.2. Penjumlahan

Penjumlahan fungsi pembangkit menyatakan penjumlahan dari barisan yang bersesuaian. Contoh di bawah ini dapat membuktikan pernyataan tersebut.

$$\begin{array}{ll} 1,\ \ 1,1,\ \ 1,1,\ \ 1,\cdots & \leftrightarrow \dfrac{1}{1-x} \\ 1,-1,1,-1,1,-1,\cdots & \leftrightarrow \dfrac{1}{1+x} \\ \hline 2,\ \ 0,2,\ \ 0,2,\ \ 0,\cdots & \leftrightarrow \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x} \end{array}$$

Hasil penjumlahan diperoleh dari dua pernyataan berbeda yang membangkitkan barisan 2, 0, 2, 0, 2, 0, ….

$$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} = \frac{(1+x)+(1-x)}{(1-x)(1+x)} = \frac{2}{1-x^2}.$$

Aturan Penjumlahan

Jika

$$f_0, f_1, f_2, \cdots \leftrightarrow F(x) \text{ dan}$$
$$g_0, g_1, g_2, \cdots \leftrightarrow G(x),$$

maka

$$f_0 + g_0, f_1 + g_1, f_2 + g_2, \cdots \leftrightarrow F(x) + G(x) \tag{5.65}$$

Karena

$$\begin{aligned} f_0 + g_0, f_1 + g_1, f_2 + g_2, \cdots &\leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (f_n + g_n) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (f_n x^n) + \sum_{n=0}^{\infty} (g_n x^n) \\ &= F(x) + G(x) \end{aligned}$$

C.3. Penggeseran Kanan

Kita menggunakan contoh barisan sederhana dan fungsi pembangkitnya sekali lagi.

$$1,1,1,1,... \leftrightarrow \frac{1}{1-x}$$

barisan 1,1,1,1, … dapat digeser ke kanan dengan menambahkan *k* bilangan 0 di depan barisan:

$$\begin{aligned} \underbrace{0,0,0,\cdots,0}_{\text{0 sebanyak k}},1,1,1,\cdots &\leftrightarrow x^k + x^{k+1} + x^{k+2} + x^{k+3} + \cdots \\ &= x^k(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) \\ &= \frac{x^k}{1-x}. \end{aligned}$$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa dengan menambahkan *k* bilangan 0 di depan barisan, maka fungsi pembangkitnya dikali dengan x^k. hal ini berlaku umum.

Aturan Penggeseran Kanan

Jika

$$f_0, f_1, f_2, \cdots \leftrightarrow F(x),$$

maka

$$\underbrace{0,0,0,\cdots,0}_{0 \text{ sebanyak } k},f_0,f_1,f_2,\cdots \leftrightarrow x^k F(x) \tag{5.66}$$

Dapat dibuktikan bahwa

$$\begin{aligned}\underbrace{0,0,0,\cdots,0}_{k \text{ bilangan } 0},f_0,f_1,f_3,\cdots &\leftrightarrow f_0x^k + f_1x^{k+1} + f_2x^{k+2} + \cdots \\ &= x^k(f_0 + f_1x + f_2x^2 + f_3x^3 + \cdots) \\ &= x^k F(x).\end{aligned}$$

C.4. Diferensial

Apa yang terjadi jika suatu fungsi pembangkit didiferensialkan? Misalkan diferensial dari fungsi pembangkit dari barisan tak hingga

$$1,1,1,1,\cdots \leftrightarrow 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

yaitu

$$\frac{d}{dx}(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$1,2,3,4,\cdots = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Dapat dilihat bahwa diferensial (turunan pertama) dari suatu fungsi pembangkit mengubah barisan dari fungsi pembangkit tersebut dalam dua hal, yaitu bahwa setiap suku menjadi kelipatan dari indeksnya, dan keseluruhan barisan akan bergeser ke kiri sejauh satu tempat.

Aturan Diferensial

Jika

$$f_0,f_1,f_2,\cdots \leftrightarrow F(x),$$

maka

$$f_1,2f_2,3f_3,\cdots \leftrightarrow F'(x) \tag{5.67}$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow f_1,2f_2,3f_3,\cdots &\leftrightarrow f_1 + 2f_2x + 3f_3x^2 + \cdots \\ &= \frac{d}{dx}(f_0 + f_1x + f_2x^2 + f_3x^3 + \cdots) \\ &= \frac{d}{dx}F(x).\end{aligned}$$

Aturan diferensial ini sangat berguna. Pada kasus tertentu diperlukan diferensial untuk memperoleh penggandaan suku-suku dengan indeksnya, dan menggeser suku-suku satu posisi ke sebelah kiri. Tetapi pada kasus yang lain hanya dilakukan untuk menggandakan suku-sukunya, tanpa harus menggeser suku-suku tersebut ke sebelah kiri. Misalnya mahasiswa akan menentukan fungsi pembangkit dari barisan kuadrat bilangan-bilangan, $0,1,4,9,19,\cdots$ yang diperoleh dengan mengalikan deret $1,1,1,1,\ldots$ dengan indeksnya sebanyak dua kali,

$$0.0, 1.1, 2.2, 3.3,\cdots = 0,1,4,9,\cdots.$$

Diferensiasi tidak hanya mengalikan setiap suku dengan indeksnya, tetapi juga menggeser keseluruhan barisan sejauh satu posisi ke sebelah kiri. Berdasarkan aturan penggeseran kanan, mahasiswa dapat mengembalikan penggeseran kiri dengan cara mengalikan fungsi pembangkitnya dengan *x*. prosedur yang akan dilakukan adalah menentukan fungsi pembangkit dari $1,1,1,1,\ldots$ kemudian menentukan turunannya, mengalikan dengan *x*, dan menentukan turunannya serta mengalikan dengan *x* sekali lagi.

$$1,1,1,1,\cdots \leftrightarrow \frac{1}{1-x}$$

$$1,2,3,4,\cdots \leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad \text{aturan diferensial}$$

$$0,1,2,3,\cdots \leftrightarrow x.\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2} \qquad \text{aturan geser kanan}$$

$$1,4,9,16,\cdots \leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right) = \frac{1+x}{(1-x)^3} \qquad \text{aturan diferensial}$$

$$0,1,4,9,16,\cdots \leftrightarrow x.\frac{1+x}{(1-x)^3} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} \qquad \text{aturan geser kanan}$$

Jadi fungsi pembangkit untuk barisan bilangan kuadrat adalah

$$\frac{x(1+x)}{(1-x)^3} \tag{5.68}$$

C.5. Perkalian

Jika

$$a_0, a_1, a_2, \cdots \leftrightarrow A(x), \quad \text{dan} \quad b_0, b_1, b_2, \cdots \leftrightarrow B(x),$$

maka

$$c_0, c_1, c_2, \cdots \leftrightarrow A(x).B(x) \tag{5.69}$$

dimana

$$c_n \equiv a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_n b_0.$$

Persamaan (5.17) cukup terkenal di dalam masalah pemrosesan signal. Barisan $c_0, c_1, c_2, \cdots$ disebut konvolusi dari barisan $a_0, a_1, a_2, \cdots$ dan $b_0, b_1, b_2, \cdots$. Untuk memahami aturan ini, dimisalkan:

$$C(x) \equiv A(x).B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

Hasil perkalian $A(x).B(x)$ dapat dihitung dengan menggunakan tabel untuk mengidentifikasi perkalian semua suku.

	b_0x^0	b_1x^1	b_2x^2	b_3x^3	$\cdots$
a_0x^0	$a_0b_0x^0$	$a_0b_1x^1$	$a_0b_2x^2$	$a_0b_3x^3$	$\cdots$
a_1x^1	$a_1b_0x^1$	$a_1b_1x^2$	$a_1b_2x^3$	$\cdots$	
a_2x^2	$a_2b_0x^2$	$a_2b_1x^3$	$\cdots$		
a_3x^3	$a_3b_0x^3$	$\cdots$			
$\vdots$	$\cdots$				

Dapat dilihat pada tabel bahwa semua suku yang mengandung *x* dengan pangkat yang sama terletak pada diagonal. Jika suku-suku ini dikumpulkan, maka akan diketahui bahwa koefisien x^n dalam hasilkali tersebut adalah jumlahan semua suku yang terletak pada diagonal $ke-(n+1)$ yaitu

$$a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-1} + a_3 b_{n-3} + \cdots + a_n b_0 \qquad (5.70)$$

C.6. Perkalian Hadamard untuk Fungsi Pembangkit

Salah satu sifat yang sangat menarik dari fungsi pembangkit rasional adalah bahwa fungsi pembangkit bersifat tertutup terhadap perkalian Hadamard. Perkalian Hadamard dari dua fungsi pembangkit

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

dan

$$B(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$$

adalah fungsi pembangkit yang berbentuk

$$A(x) \cdot B(x) = a_0 b_0 + a_1 b_1 x + a_2 b_2 x^2 + \cdots \qquad (5.71)$$

Jadi perkalian Hadamard dari dua barisan adalah barisan yang terbentuk dari hasil perkalian elemen-elemen barisan yang bersesuaian. Penerapan perkalian Hadamard ini dapat diberlakukan pada masalah tiket keberuntungan yang dijelaskan sebelumnya, untuk menghitung kuadrat dari koefisien polinomial pembangkit A_3. Situasi seperti ini akan muncul pada saat kita akan menghitung pasangan objek-objek dengan orde *n* yang sama: jika banyaknya objek jenis pertama adalah a_n, dan banyaknya objek jenis kedua adalah b_n, maka banyaknya pasangan kedua objek adalah $a_n b_n$.

Teorema 5.2. *Perkalian Hadamard antara dua fungsi pembangkit adalah rasional.* Untuk membuktikan teorema ini diperlukan suatu penciri lain dari fungsi pembangkit yang rasional, yang dinyatakan sebagai Lemma 5.1.

Lemma 5.1. *fungsi pembangkit dari barisan* $a_0, a_1, a_2, \cdots$ dikatakan rasional jika dan hanya jika terdapat bilangan-bilangan $q_1, q_2, \cdots, q_l$ dan polinomial-polinomial $p_1(n), p_2(n), \cdots, p_l(n)$ sedemikian sehingga dengan dimulai dari suatu bilangan *n* maka diperoleh

$$a_n = p_1(n)q_1^n + \cdots + p_l(n)q_l^n \tag{5.72}$$

Pernyataan ruas kanan dalam persamaan di atas dinamakan *quasipolinomial* dengan variabel *n*.

Bukti. Perhatikan bahwa fungsi pembangkit $(1-qx)^{-k}$ dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\begin{aligned}(1-qx)^{-k} &= 1 - \binom{-k}{1}qx + \binom{-k}{2}q^2x^2 + \binom{-k}{3}q^3x^3 + \cdots \\ &= 1 + \binom{k}{1}qx + \binom{k+1}{2}q^2x^2 + \binom{k+3}{3}q^3x^3 + \cdots \\ &= 1 + \binom{k}{k-1}qx + \binom{k+1}{k-1}q^2x^2 + \binom{k+2}{k-1}q^3x^3 + \cdots\end{aligned}$$

Contoh 5.22. Fungsi pembangkit dari barisan

$$\binom{k}{0}, \binom{k}{1}, \binom{k}{2}, \cdots, \binom{k}{k}, 0, 0, 0, 0, \cdots$$

adalah

$$\binom{k}{0} + \binom{k}{1}x + \binom{k}{2}x^2 + \cdots + \binom{k}{k}x^k.$$

Fungsi pembangkit ini sama dengan $(1+x)^k$ yang dijabarkan dengan teorema binomial.

Contoh 5.23: Fungsi pembangkit dari barisan $\underbrace{1,\cdots,1}_{k},0,0,0,0,\cdots$ dinyatakan dengan

$$1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{k-1}=\frac{1-x^k}{1-x}$$

Contoh 5.24: Fungsi pembangkit dari 1, 1, 1, 1, . . . dinyatakan dengan

$$1+x+x^2+x^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$$

Contoh 5.25: Fungsi pembangkit dari barisan 2, 4, 1, 1, 1, 1, … dinyatakan dengan

$$\begin{aligned}2+4x+x^2+x^3+x^4+\cdots&=(1+3x)+(1+x+x^2+x^3+\cdots)\\&=(1+3x)+\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+3x+\frac{1}{1-x}\end{aligned}$$

Konsep yang digunakan pada Contoh 5.25 di atas dapat digeneralisasi sebagai berikut:

Proposisi 5.1.

Misalkan bahwa barisan

$$a_0,a_1,a_2,a_3,\cdots \text{dan } b_0,b_1,b_2,b_3,\cdots$$

berturut-turut memiliki fungsi pembangkit $f(x)$ dan $g(x)$, maka fungsi pembangkit dari barisan

$$a_0+b_0,a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3,\cdots$$

adalah $f(x)+g(x)$.

Contoh 5.26: Fungsi pembangkit dari barisan $3,1,3,1,3,1,\cdots$ dapat ditentukan dengan cara menggabungkan fungsi pembangkit dari barisan $1,1,1,1,1,1,\cdots$ dan $2,0,2,0,2,0,\cdots$. Fungsi pembangkit dari barisan $2,0,2,0,2,0,\cdots$ adalah

$$2+2x^2+2x^4+\cdots=2(1+x^2+x^4+\cdots)=\frac{2}{1-x^2}.$$

Dengan demikian fungsi pembangkit untuk $3,1,3,1,3,1,\cdots$ adalah

$$\frac{1}{1-x}+\frac{2}{1-x^2}$$

Seringkali diferensiasi dan integrasi deret pangkat formal dapat digunakan untuk menentukan fungsi pembangkit dari berbagai deret.

Contoh 5.27: Fungsi pembangkit dari $1,2,3,4,\cdots$ adalah

$$\begin{aligned}1+2x+3x^2+\cdots &= \frac{d}{dx}\left(x+x^2+x^3+x^4+\cdots\right)\\ &= \frac{d}{dx}\left(1+x+x^2+x^3+\cdots\right) \qquad = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{(1-x)^2}\end{aligned}$$

Proposisi 5.2

Misalkan bahwa barisan $a_0,a_1,a_2,\cdots$ memiliki fungsi pembangkit $f(x)$. Maka untuk setiap $k\in\mathbb{N}$, fungsi pembangkit dari barisan *tertunda*:

$$\underbrace{0,0,\cdots,0}_{k},a_0,a_1,a_2,\cdots \tag{5.73}$$

dinyatakan dengan

$$x^k f(x).$$

Bukti

Perhatikan bahwa fungsi pembangkit dari barisan (5.22) adalah

$$a_0x^k+a_1x^{k+1}+a_2x^{k+2}+\cdots = x^k\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\right)$$

seperti yang diharapkan.

Contoh 5.28. Fungsi pembangkit dari barisan 0,1,2,3,4,… dinyatakan dengan

$$\frac{x}{(1-x)^2}$$

dan fungsi pembangkit dari barisan $0,0,0,0,0,1,2,3,4,\cdots$ dinyatakan dengan

$$\frac{x^5}{(1-x)^2}.$$

Sebaliknya, fungsi pembangkit dari barisan 0,0,0,0,0,0,0,3,1,3,1,3,1,… dinyatakan dengan

$$\frac{x^7}{1-x}+\frac{2x^7}{1-x^2}.$$

Contoh 5.29. Perhatikan barisan $a_0,a_1,a_2,\cdots$ dimana $a_n=n^2+n$ untuk setiap $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Untuk mencari fungsi pembangkit dari barisan ini, misalkanlah $f(x)$ dan

$g(x)$ masing-masing menyatakan fungsi pembangkit dari barisan $0,1^2,2^2,3^2,\cdots$ dan $0,1,2,3,\cdots$

Perhatikan Contoh 5.17 dan 5.18 bahwa

$$g(x)=\frac{x}{(1-x)^2}.$$

Untuk menentukan $f(x)$ perhatikan bahwa fungsi pembangkit dari barisan $1^2,2^2,3^2,\cdots$ dinyatakan dengan

$$\begin{aligned}1^2+2^2x+3^2x^2+\cdots &= \frac{d}{dx}\left(x+2x^2+3x^2+\cdots\right)\\ &= \frac{d}{dx}\left(g(x)\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)=\frac{1+x}{(1-x)^3}\end{aligned}$$

Dari proposisi 5.2.,

$$f(x)=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

Akhirnya, berdasarkan Proposisi 5.1, dapat diketahui bahwa fungsi pembangkit yang dicari adalah

$$f(x)+g(x)=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}+\frac{x}{(1-x)^2}=\frac{2x}{(1-x)^3}.$$

D. Koefisien Fungsi Pembangkit

D.1. Mencari Koefisien Fungsi Pembangkit Biasa

Kita telah mendiskusikan dua langkah untuk memecahkan masalah kombinatorial dengan menggunakan fungsi pembangkit. Langkah pertama kita harus mendapatkan fungsi pembangkit untuk permasalahan tersebut selanjutnya langkah kedua yaitu mencari koefisien-koefisien yang tepat dari fungsi pembangkit tersebut. Di bagian ini kita akan mendiskusikan bagaimana cara mencari koefisian dari fungsi pembangkit tanpa menggunakan aturan perkalian. Kadang kita bisa menggunakan aturan kombinatorial untuk mendapatkan koefisien. Sebagai contoh berikut ini akan dibuktikan Teorema Binomial dan Teorema Multinomial.

Teorema 5.3. Teorema Binomial

Teorema Binomial dituliskan sebagai berikut:

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n$$

Bukti:

$$(1+x)^n = \underbrace{(1+x)(1+x)(1+x)\cdots(1+x)}_{\text{n faktor}}$$

Koefisien dari x^r dengan $0 \le r \le n$ adalah jumlah banyaknya cara berbeda dalam memilih *x* sebanyak *r* dan 1 sebanyak $n-r$ kali dari *n* faktor yang ada. Jumlah banyaknya cara memilih *x* sebanyak *r* kali dari *n* faktor yang ada yaitu $\binom{n}{r}$.

Jadi,

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} 1^{n-r} x^r = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r$$

Selanjutnya, bentuk

$$\begin{aligned}(1+x)^n &= \underbrace{(1+x)(1+x)(1+x)\cdots(1+x)}_{\text{n faktor}} \\ &= (x^0+x^1)(x^0+x^1)(x^0+x^1)\cdots(x^0+x^1) \\ &= (x^0+x^1)^n\end{aligned}$$

merupakan fungsi pembangkit untuk banyaknya penyelesaian bilangan bulat

$$X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n = r, \quad 0 \le X_i \le 1.$$

Teorema 5.4. Teorema Multinomial

Bentuk $(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n$ adalah jumlah dari

$$\binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_m} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_m^{n_m}$$

dengan

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n.$$

Bukti: Faktor-faktor $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_m^{n_m}$ menunjukkan banyaknya cara untuk memilih x_1 sebanyak n_1 kali dari *n*1 faktor, memilih x_2 sebanyak n_2 kali dari *n* – *n*1 faktor, memilih

x_3 sebanyak n_3 kali dari $n-n_1-n_2$ faktor, $\cdots$ memilih x_m sebanyak n_m kali dari $n-n_1-n_2-\cdots-n_{m-1}$ faktor. Dengan demikian banyaknya semua cara adalah:

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n-n_1-n_2-n_3\cdots n_{m-1}}{n_m}$$

$$=\left(\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\right)\left(\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}\right)\left(\frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!}\right)\cdots.$$

$$\left(\frac{(n-n_1-n_2-\cdots-n_{m-1})!}{n_m!(n-n_1-n_2-n_3-\cdots-n_m)!}\right)$$

$$=\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\cdots n_m!}$$

Di sisi lain, $(X_1+X_2+X_3+\cdots+X_m)^n$ adalah fungsi pembangkit dari banyaknya penyelesaian bulat

$$X_1+X_2+X_3+\cdots+X_n=r,\ 1\le X_i\le m$$

Proposisi 5.3.

(a). $(1+x+x^2+\cdots)^n=\binom{m-1+0}{0}+\binom{m-1+1}{1}x+\binom{m-1+2}{2}x^2+\cdots+\binom{m-1+r}{r}x^r+\cdots$

(b). $(1+x+x^2+\cdots+x^{m-1})^n=(1-x^m)^n(1+x+x^2+x^3+\cdots)$

(c). $(1-x^m)^n=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}x^m+\binom{n}{2}x^{2m}-\binom{n}{3}x^{3m}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}x^{nm}$

(d). $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots$

Bukti

a) Akan dibuktikan bahwa:

$$(1+x+x^2+\cdots)^n=\binom{n-1+0}{0}+\binom{n-1+1}{1}x+\binom{n-1+2}{2}x^2+\cdots$$

Bentuk $(1+x+x^2+\cdots)^n$ adalah fungsi pembangkit untuk menentukan banyaknya penyelesaian bilangan bulat dari

$$X_1+X_2+\cdots+X_n=r,\quad X_i\ge 0$$

Karena banyaknya penyelesaian adalah $\binom{n-1+r}{r}$ maka koefisien dari x^r adalah $\binom{n-1+r}{r}$.

Dengan demikian,

$$\left(1+x+x^2+\cdots\right)^n = \binom{n-1+0}{0}+\binom{n-1+1}{1}x+\binom{n-1+2}{2}x^2+\cdots$$
$$\binom{n-1+r}{r}x^r+\cdots$$

b) Akan dibuktikan bahwa

$$\left(1+x+x^2+\cdots+x^{m-1}\right)^n = \left(1-x^m\right)^n\left(1+x+x^2+\cdots\right)^n$$

Diketahui,

$$\left(1-x^m\right)^n\left(1+x+x^2+\cdots\right)^n$$
$$=\left(1+x+x^2+\cdots\right)-x^m\left(1+x+x^2+\cdots\right)$$
$$=\left(1+x+x^2+\cdots+x^{m-1}+x^m+x^{m+1}+\cdots\right)-\left(x^m+x^{m+1}+x^{m+2}+\cdots\right)$$
$$=1+x+x^2+\cdots+x^{m-1}$$

Sehingga

$$\left(1+x+x^2+\cdots+x^{m-1}\right)^n =\left(\left(1-x^m\right)\left(1+x+x^2+\cdots\right)\right)^n$$
$$=\left(1-x^m\right)^n\left(1+x+x^2+\cdots\right)^n$$

c) Akan dibuktikan:

$$\left(1-x^m\right)^n=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}x^m+\binom{n}{2}x^{2m}-\binom{n}{3}x^{3m}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}x^{nm}$$

Berdasarkan Teorema 5.3 diketahui bahwa

$$(1+x)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x^1+\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{3}x^3+\cdots+\binom{n}{n}x^n$$

Dengan mensubtitusi x menjadi $-x^m$ diperoleh

$$
\begin{aligned}
\left(1-x^m\right)^n &= \binom{n}{0}+\binom{n}{1}\left(-x^m\right)^1+\binom{n}{2}\left(-x^m\right)^2+\binom{n}{3}\left(-x^m\right)^3+\cdots+\binom{n}{n}\left(-x^m\right)^n \\
&= \binom{n}{0}+\binom{n}{1}(-1)^1\left(x^m\right)+\binom{n}{2}(-1)^2\left(x^{2m}\right)+\binom{n}{3}(-1)^3\left(x^{3m}\right)+\cdots+\binom{n}{n}(-1)^n\left(x^{nm}\right) \\
&= \binom{n}{0}-\binom{n}{1}\left(x^m\right)+\binom{n}{2}\left(x^{2m}\right)-\binom{n}{3}\left(x^{3m}\right)+\cdots+\binom{n}{n}(-1)^n\left(x^{nm}\right)
\end{aligned}
$$

d) Akan dibuktikan $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots$

Bukti:

Diketahui bahwa

$$
\begin{aligned}
(1-x)\left(1+x+x^2+\cdots\right) &= \left(1+x+x^2+\cdots\right)-x\left(1+x+x^2+\cdots\right) \\
&= \left(1+x+x^2+\cdots\right)-\left(x+x^2+x^3\cdots\right) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Oleh karena itu

$$
\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots
$$

Proses mencari turunan dari persamaan (5.33) bisa jadi sangat melelahkan tetapi metode pecahan parsial, koefisien-koefisiennya mudah diketahui. Karena derajat pembilang persamaan (5.33) lebih kecil dari derajat penyebut, maka langkah pertama adalah memfaktorkan pembilang.

$$
1-x-x^2=(1-\alpha_1x)(1-\alpha_2x)
$$

dimana $\alpha_1=(1+\sqrt{5})/2$ dan $\alpha_2=(1-\sqrt{5})/2.$ Bentuk-bentuk ini serupa dengan akar-akar karakteristik dari rekurensi Fibonacci. Langkah berikutnya adalah menentukan c_1 dan c_2 yang memenuhi

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{1-x-x^2} &= \frac{c_1}{1-\alpha_1x}+\frac{c_2}{1-\alpha_2x} \\
&= \frac{c_1(1-\alpha_2x)+c_2(1-\alpha_1x)}{(1-\alpha_1x)(1-\alpha_2x)} \\
&= \frac{c_1+c_2-(c_1\alpha_2+c_2\alpha_1)x}{1-x-x^2}.
\end{aligned}
$$

sehingga diketahui bahwa $c_1+c_2=0$ dan $-(c_1\alpha_2+c_2\alpha_1)=1.$

Dengan menyelesaikan persamaan-persamaan ini, diperoleh

$$c_1 = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$c_1 = \frac{-1}{\alpha_1 - \alpha_2} = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

Sehingga dengan menggunakan Corollary 5.1 dan aturan penjumlahan, maka dapat disimpulkan bahwa

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{\alpha_1^n}{\sqrt{5}} - \frac{\alpha_2^n}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) \end{aligned}$$

Untuk memudahkan dalam menentukan koefisien fungsi pembangkit, di bawah ini diberikan beberapa definisi penting.

1. Koefisien x^r pada $(a_o + a_1x + \cdots)(b_o + b_1x + \cdots)$ adalah

   $a_0b_r + a_1b_{r-1} + a_2b_{r-2} + \cdots + a_rb_0$

2. Teorema Binomial

   $(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n$

3. $(1+x+x^2+\cdots)^n = \binom{n-1+0}{0} + \binom{n-1+1}{1}x + \cdots + \binom{n-1+r}{r}x^r$

4. $(1+x+x^2+\cdots+x^{m-1})^n = (1-x^{m-1})^n(1+x+x^2+\cdots)^n$

5. $(1-x^m)^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1}x^m + \binom{n}{2}x^{2m} - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}x^{nm}$

6. $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$

Contoh 5.30. Tentukan koefisien x^{20} dari $(x^3 + x^4 + \cdots)^3$

Jawab:

Pada Proposisi 5.3.a telah dibuktikan bahwa

$$\begin{aligned} (x^3 + x^4 + \cdots)^3 &= x^9(1 + x + x^2 + \cdots)^3 \\ &= x^9\left[\binom{3-1+0}{0} + \binom{3-1+1}{1}x + \cdots\right] \end{aligned}$$

Dengan demikian koefisien x^{20} dari $\left(x^3+x^4+\cdots\right)^3$ diperoleh dari koefisien x^{11} pada fungsi pembangkit $\left(1+x+x^2+\cdots\right)^3$ adalah $\binom{3-1+11}{11}=\binom{13}{11}=\frac{13!}{2!11!}$.

Contoh 5.31. Tentukan koefisien x^9 dari $\left(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5\right)^4$

Jawab:

Dari Proposisi 5.3.b diperoleh

$$\left(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5\right)^4=\left(1-x^6\right)^4\left(1+x+x^2+x^3+\cdots\right)^4,$$

yang berdasarkan proposisi 5.3.a dan 5.3.c,

$$\left(1-x^6\right)^4=\binom{4}{0}-\binom{4}{1}x^6+\binom{4}{2}x^{12}-\binom{4}{3}x^{18}+\binom{4}{3}x^{24}$$

$$\left(1+x+x^2+x^3+\cdots\right)^4=\binom{4-1+0}{0}+\binom{4-1+1}{1}x+\binom{4-1+2}{2}x^2\cdots$$

Sehingga koefisien x^9 dari $\left(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5\right)^4$ adalah

$$\binom{4}{0}\binom{4-1+9}{9}-\binom{4}{1}\binom{4-1+3}{3}$$

Contoh 5.32. Ada berapa cara mengambil 100 huruf dari huruf-huruf membentuk kata "KOMBINATORIKA" sedemikian sehingga setiap konsonan terpilih paling banyak 20?

Jawab. Di dalam kata "KOMBINATORIKA" terdapat 6 konsonan dan 3 vokal. Setiap konsonan terpilih paling banyak 20. Oleh karena itu, dapat dibentuk fungsi pembangkit sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
p(x) &= (1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{20})^6(1+x+x^2+x^3+\cdots)^3 \\
&= \left(\frac{1-x^{21}}{-x+1}\right)^6\left(\frac{1}{1-x}\right)^3 = (1-x^{21})^6\left(\frac{1}{1-x}\right)^9 \\
&= \left[\binom{6}{0}1^0(-x^{21})^6+\binom{6}{1}1^1(-x^{21})^5+\binom{6}{2}1^2(-x^{21})^4+\binom{6}{3}1^3(-x^{21})^3\right. \\
&\quad \left.+\binom{6}{4}1^4(-x^{21})^2+\binom{6}{5}1^5(-x^{21})+\binom{6}{6}1^6(-x^{21})^0\right]\sum_{r=0}^{\infty}\binom{9+r-1}{r}x^r \\
&= \left[x^{126}-6x^{105}+15x^{84}-20x^{63}+15x^{42}-6x^{21}+1\right]\sum_{r=0}^{\infty}\binom{9+r-1}{r}x^r \\
&= \sum_{r=0}^{\infty}\binom{r+8}{r}x^{r+126}-6\sum_{r=0}^{\infty}\binom{r+8}{r}x^{r+105}+15\sum_{r=0}^{\infty}\binom{r+8}{r}x^{r+84} \\
&\quad -20\sum_{r=0}^{\infty}\binom{r+8}{r}x^{r+63}+15\sum_{r=0}^{\infty}\binom{r+8}{r}x^{r+42} \\
&\quad -6\sum_{r=0}^{\infty}\binom{r+8}{r}x^{r+21}+\sum_{r=0}^{\infty}\binom{r+8}{r}x^{r} \\
&= \sum_{r=126}^{\infty}\binom{r-118}{r-126}x^r-6\sum_{r=105}^{\infty}\binom{r-97}{r-105}x^r+15\sum_{r=84}^{\infty}\binom{r-76}{r-84}x^r \\
&\quad -20\sum_{r=63}^{\infty}\binom{r-55}{r-63}x^r+15\sum_{r=42}^{\infty}\binom{r-34}{r-42}x^r-6\sum_{r=21}^{\infty}\binom{r-13}{r-21}x^r+\sum_{r=0}^{\infty}\binom{r+8}{r}x^r
\end{aligned}
$$

Jadi banyaknya cara untuk mengambil 100 huruf dari huruf-huruf membentuk kata "KOMBINATORIKA" dengan huruf konsonan terpilih paling banyak 20 adalah

$$15\binom{r-76}{r-84}x^r-20\binom{r-55}{r-63}x^r+15\binom{r-34}{r-42}x^r-6\binom{r-13}{r-21}x^r$$

Variabel x dihilangkan dan r = 100 sehingga diperoleh:

$$15\binom{24}{16}-20\binom{45}{37}+15\binom{66}{58}-6\binom{87}{79}=59.664.083.900 \text{ cara.}$$

D.2. Deret Taylor.

Jika diberikan koefisien $f_0, f_1, f_3, \cdots$ maka fungsi pembangkit $F(x)$ dapat ditentukan dengan mudah karena

$$F(x)=f_0+f_1x+f_2x^2+\cdots \tag{5.74}$$

Untuk menentukan barisan koefisien-koefisien dari fungsi pembangkit, terlebih dulu harus dihitung Deret Taylor untuk fungsi pembangkit.

D.3. Aturan Deret Taylor

Misalkan *F*(*x*) adalah fungsi pembangkit dari barisan $f_0, f_1, f_3, \cdots,$ maka $f_0 = F(0)$ dan $f_n = \dfrac{F^{(n)}(0)}{n!}$ untuk $n \geq 1,$ dimana $F^{(n)}(0)$ adalah nilai turunan ke-*n* dari $F(x)$ pada titik $x = 0.$ Hal ini disebabkan karena jika

$$F(x) = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \cdots$$

maka

$$F(0) = f_0 + f_1.0 + f_2 0^2 + \cdots = f_0.$$

Juga,

$$F'(x) = \frac{d}{dx}(F(x)) = f_1 + 2f_2 x + 3f_3 x^2 + 4f_4 x^3 + \cdots$$

sehingga

$$F'(0) = f_1.$$

Turunan kedua adalah

$$F''(x) = \frac{d}{dx}(F'(x)) = 2f_2 + 3.2f_3 x + 4f_4 x^2 + \cdots$$

sehingga

$$F''(0) = 2f_2$$

yang menunjukkan bahwa

$$f_2 = \frac{F''(0)}{2}.$$

Secara umum,

$$F^{(n)} = n!f_n + (n+1)!f_{n+1}x + \frac{(n+2)!}{2}f_{n+2}x^2 + \cdots + \frac{(n+k)!}{k!}f_{n+k}x^k + \cdots$$

Sehingga

$$F^{(n)}(0) = n!f_n$$

dan

$$f_n = \frac{F^{(n)}(0)}{n!}$$

Hal ini menunjukkan bahwa

$$F(0), F'(0), \frac{F''(0)}{2!}, \frac{F'''(0)}{3!}, \cdots, \frac{F^n(0)}{n!} \cdots \leftrightarrow F(x) \qquad (5.75)$$

Barisan pada ruas kiri persamaan (5.24) menghasilkan ekspansi deret Taylor untuk suatu fungsi yang berbentuk

$$F(x) = F(0) + F'(0)x + \frac{F''(0)}{2!}x^2 + \frac{F'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{F^n(0)}{n!}x^n + \cdots$$

Contoh 5.33. Tentukanlah barisan dari fungsi pembangkit $F(x) = \frac{1}{1-x}$.

Jawab: Dengan menentukan turunan-turunannya, diperoleh

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \frac{1}{(1-x)^2} \\
F''(x) &= \frac{2}{(1-x)^3} \\
F'''(x) &= \frac{2.3}{(1-x)4} \\
&\vdots \\
F^{(n)} &= \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}
\end{aligned}$$

yang menunjukkan bahwa koefisien dari di dalam 1/(1-*x*) adalah

$$\frac{F^{(n)}(0)}{n!} = \frac{n!}{n!(1-0)^{n+1}} = 1.$$

Dengan kata lain,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$$

Dengan pendekatan yang sama maka dapat dibentuk beberapa deret yang sudah umum dikenal yaitu

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \\
e^{ax} &= 1 + ax + \frac{a^2}{2!}x^2 + \frac{a^3}{3!}x^3 + \cdots + \frac{a^n}{n!}x^n + \cdots \\
\ln(1-x) &= -ax - \frac{a^2}{2}x^2 - \frac{a^3}{3}x^3 - \cdots - \frac{a^n}{n}x^n - \cdots
\end{aligned}$$

Bagaimana bentuk deret dari

$$F(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^4}? \tag{5.76}$$

Sehubungan dengan itu, akan ditentukan koefisien dari x^n dalam $F(x)$ untuk mengetahui

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} i^2$$

Secara teoritis turunan ke-*n* dapat diketahui untuk $F(x)$ tetapi hasilnya mungkin tidak seperti yang diharapkan. Menggunakan fungsi pembangkit bukan gagasan yang tepat.

Pada saat otot mengalami stres, sedikit pijatan dapat membantu meregangkan otot tersebut. Demikian juga untuk masalah polinomial yang melibatkan turunan-turunan. Sebagai contoh dari persamaan (5.25), dengan sedikit pijatan maka dapat ditunjukkan bahwa

$$F(x) = \frac{x + x^2}{(1-x)^4} = \frac{x}{(1-x)^4} + \frac{x^2}{(1-x)^4} \tag{5.77}$$

Tujuannya adalah mencari koefisien x^n di dalam $F(x)$. Jika kita memperhatikan persamaan (5.26) atau jika kita mengkombinasikan aturan geser kanan dengan aturan penjumlahan, akan dapat dilihat bahwa koefisien x^n di dalam $F(x)$ adalah hasil penjumlahan dari

$$\text{koefisien } x^{n-1} \text{ dari } \frac{1}{(1-x)^4} \text{ dan}$$

$$\text{koefisien } x^{n-2} \text{ dari } \frac{1}{(1-x)^4}$$

Mungkin ada cara yang lebih sederhana untuk mencari koefisien-koefisien dari $1/(1-x)^4$. Telah diketahui turunan-turuan $F(x)$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \frac{4}{(1-x)^5} \\
F''(x) &= \frac{4.5}{(1-x)^6} \\
F'''(x) &= \frac{4.5.6}{(1-x)^7} \\
&\vdots \\
F^n(x) &= \frac{(n+3)!}{6(1-x)^{n+4}}
\end{aligned}$$

Ini menunjukkan bahwa koefisien ke-*n* dari $1/(1-x)^4$ adalah

$$\frac{F^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(n+3)!}{6n!} = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6} \tag{5.78}$$

Persamaan (5.27) menunjukkan bahwa koefisien dari x^{n-1} dalam $1/(1-x)^4$ adalah

$$\frac{(n+2)(n+1)n}{6} \tag{5.79}$$

dan koefisien dari x^2 adalah

$$\frac{(n+1)n(n-1)}{6} \tag{5.80}$$

Jika persamaan (5.28) dijumlahkan dengan persamaan (5.29) maka diperoleh

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} i^2 &= \frac{(n+2)(n+1)n}{6} + \frac{(n+1)n(n-1)}{6} \\ &= \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}\end{aligned}$$

D.4. Pecahan Parsial

Pecahan parsial adalah suatu rasio polinomial yang dinyatakan sebagai jumlahan dari suatu polinomial dengan koefisien-koefisien yang berbentuk

$$\frac{cx^a}{(1-\alpha x)^b} \tag{5.81}$$

dimana *a* dan *b* adalah bilangan-bilangan bulat dan $b > a \geq 0$. Hal ini dimungkinkan karena turunan $1/(1-\alpha x)^b$ dapat dihitung dengan mudah, sehingga dengan demikian koefisien-koefisien dari persamaan (5.30) juga dapat ditentukan dengan mudah.

Lemma 5.1. Jika $b \in \mathbb{Z}^+$ maka turunan ke-*n* dari $1/(1-\alpha x)^b$ adalah

$$\frac{(n+b-1)!\alpha^n}{(b-1)!(1-\alpha x)^{b+n}}$$

Bukti.

Pembuktian dilakukan dengan induksi matematika. Hipotesis induksi $P(n)$ adalah pernyataan dalam Lemma 5.1.

Langkah basis (untuk *n* = 1): turunan pertama adalah

$$\frac{b\alpha}{(1-\alpha x)^{b+1}}$$

karena

$$\frac{(1+b-1)!\alpha^1}{(b-1)!(1-\alpha x)^{b+1}} = \frac{b\alpha}{(1-\alpha x)^{b+1}}$$

maka $P(1)$ merupakan pernyataan yang benar.

Langkah induksi: Selanjutnya diasumsikan bahwa $P(n=k)$ benar, untuk membuktikan $P(n=k+1)$ untuk $n \geq 1$. $P(n=k)$ menunjukkan bahwa turunan ke-*k* dari $1/(1-\alpha x)^b$ adalah

$$\frac{(k+b-1)!\alpha^k}{(b-1)!(1-\alpha x)^{b+k}}$$

dan turunan ke-(k +1) adalah

$$\frac{(k+b-1)!(b+k)\alpha^{k+1}}{(b-1)!(1-\alpha x)^{b+k+1}} = \frac{(k+b)!\alpha^{k+1}}{(b-1)!(1-\alpha x)^{b+k+1}}$$

Artinya $P(k+1)$ benar. Jadi tebukti bahwa jika $b \in \mathbb{Z}^+$ maka turunan ke-*n* dari $1/(1-\alpha x)^b$ adalah

$$\frac{(n+b-1)!\alpha^n}{(b-1)!(1-\alpha x)^{b+n}}$$

Corollary 5.1. *Jika* $a, b \in \mathbb{Z}$ dan $b > a \geq 0$, maka untuk sebarang $n \geq a$, koefisien dari x^n dalam

$$\frac{cx^a}{(1-\alpha x)^b}$$

adalah

$$\frac{c(n-a+b-1)!\alpha^{n-a}}{(n-a)!(b-1)!}.$$

Bukti.
Menurut deret Taylor, koefisien ke-*n* dari

$$\frac{1}{(1-\alpha x)^b}$$

adalah turunan ke-*n* dari pernyataan tersebut yang dihitung pada titik $x = 0$, kemudian dibagi dengan *n*!. berdasarkan Lemma 5.1,

$$\frac{(n+b-1)!\alpha^n}{n!(b-1)!(1-0)^{b+n}} = \frac{(n+b-1)!\alpha}{n!(b-1)!}.$$

Dengan aturan penggandaan dan aturan geser kanan, diketahui bahwa koefisien dari x^n dalam

$$\frac{cx^\alpha}{(1-\alpha x)^b}$$

adalah

$$\frac{c(n-a+b-1)!\alpha^{n-a}}{(n-a)!(b-1)!}.$$

Mengubah rasio polinomial menjadi jumlahan polinomial dengan suku-suku yang berbentuk seperti dalam persamaan 5.30 memerlukan penjabaran yang cukup panjang tetapi pada umumnya langsung memberikan hasil yang diinginkan. Prosesnya akan ditunjukkan melalui contoh berikut ini.

Misalkan suatu fungsi pembangkit yang berbentuk rasio

$$F(x)=\frac{4x^3+2x^2+3x+6}{2x^3-3x^2+1} \tag{5.82}$$

Langkah pertama untuk mengubah *F*(*x*) adalah mengupayakan sedemikian sehingga derajat pembilang lebih rendah dari derajat penyebut. Ini dapat dilakukan dengan cara membagi pembilang terhadap penyebut kemudian mengambil sisanya, sebagaimana dilakukan di dalam teorema dasar aritmetika. Jadi,

$$\frac{4x^3+2x^2+3x+6}{2x^3-3x^2+1}=2+\frac{8x^2+3x+4}{2x^3-3x^2+1}.$$

Selanjutnya pembilang difaktorkan sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}2x^3-3x^2+1&=(2x+1)(x^2-2x+1)\\&=(2x+1)(x-1)^2\\&=(1-x)^2(1+2x)\end{aligned}$$

Nilai-nilai c_1,c_2,c_3 ditentukan sebagai berikut:

$$\frac{8x^2+3x+4}{2x^3-3x^2+1}=\frac{c_1}{1+2x}+\frac{c_2}{(1-x)^2}+\frac{c_3x}{(1-x)^2} \tag{5.83}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\frac{c_1}{1+2x}+\frac{c_2}{(1-x)^2}+\frac{c_3x}{(1-x)^2}&=\frac{c_1(1-x)^2+c_2(1+2x)+c_3x(1-x)^2}{(1+2x)(1-2x)^2}\\&=\frac{c_1-2c_1x+c_1x^2+c_2+2c_2x+c_3x+2c_3x^2}{2x^3-3x^2+1}\\&=\frac{c_1+c_2+(-2c_1+2c_2+c_3)x+(c_1+2c_3)x^2}{2x^3-3x^2+1}\end{aligned}$$

Supaya persamaan (5.32) berlaku maka haruslah $8=c_1+2c_3,\ 3=-2c_1+2c_2+c_3,$ dan $4=c_1+c_2.$ Setelah persamaan-persamaan ini diselesaikan maka $c_1=2,\ c_2=2,$ dan $c_3=3.$ Oleh karena itu,

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \frac{4x^3+2x^2+3x+6}{2x^3-3x^2+1} \\
&= 2+\frac{2}{1+2x}+\frac{2}{(1-x)^2}+\frac{3x}{(1-x)^2}
\end{aligned}
$$

Akhirnya koefisien dari $F(x)$ dapat ditentukan dengan menggunakan Corollary 5.1 dan aturan penjumlahan sehingga didapatkan

$$f_0 = 2+2+2 = 6$$

dan

$$
\begin{aligned}
f_n &= \frac{2(n-0+1-1)!(-2)^{n-0}}{(n-0)!(1-1)!}+\frac{2(n-0+2-1)!(1)^{n-0}}{(n-0)!(2-1)!}+\frac{3(n-1+2-1)!(1)^{n-1}}{(n-1)!(2-1)!} \\
&= (-1)^n 2^{n+1} + 2(n+1) + 3n \\
&= (-1)^n 2^{n+1} + 5n + 2
\end{aligned}
$$

untuk $n \geq 1$. Metode ini akan sangat berguna dalam menyelesaikan masalah-masalah relasi rekurensi yang akan dipelajari pada bab berikutnya.

F. Soal-Soal Latihan

1. Carilah koefisien x^7 dari $\left(1+x+x^2+x^3+\cdots\right)^{15}$
2. Carilah koefisien x^7 dari $\left(1+x+x^2+x^3+\cdots\right)^n$ untuk $n \in \mathbb{Z}^+$.
3. Carilah koefisien x^{50} dari $\left(x^7+x^8+x^9\cdots\right)^6$
4. Carilah koefisien x^{20} dari $\left(x^2+x^3+x^4+x^5+x^6\right)^5$
5. Carilah fungsi pembangkit dari distribusi peluang diskrit berikut:
   a. Distribusi yang menggambarkan peluang kejadian untuk satu koin yang dilemparkan
   b. Distribusi yang menggambarkan peluang kejadian dari suatu dadu yang dilemparkan.
   c. Distribusi yang menggambarkan peluang kejadian dari satu dadu yang dilemparkan dan selalu muncul sisi 3.
   d. Distribusi homogen dari himpunan $\{n, n+1, n+2, \cdots, n+k\}$
   e. Distribusi binomial dari himpunan $\{n, n+1, n+2, \cdots, n+k\}$
6. Carilah fungsi pembangkit untuk barisan-barisan berikut ini:
   a. $1, 2, 3, 4, \cdots$
   b. $1.2, 2.3, 3.4, \cdots$
   c. $1^2, 2^2, 3^2, \cdots$

7. Carilah fungsi pembangkit dari barisan $1,1,2,3,5,8,13,21,34,\cdots$

8. Misalkan $p = 1 + x + x^2 + x^3$, $q = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$, dan $r = \dfrac{1}{1-x}$.

   Carilah:

   a. Koefisien x^3 di dalam p^2, p^3, dan p^4.

   b. Koefisien x^3 di dalam q^2, q^3, dan q^4.

   c. Koefisien x^3 di dalam r^2, r^3, dan r^4.

9. Carilah koefisien x^2 di dalam:

   a. $(2 + x + x^2)(1 + 2x + x^2)(1 + x + 2x^2)$

   b. $(2 + x + x^2)(1 + 2x + x^2)^2(1 + x + 2x^2)^3$

   c. $x(1 + x)^{43}(2 - x)^5$

10. Carilah koefisien x^{21} di dalam $(x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^8$

11. Tentukanlah koefisien-koefisien:

    a. x^{12} di dalam $(x^3 + x^4 + x^5 + \cdots)^3$

    b. x^5 di dalam $(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^{10}$

    c. x^{24} di dalam $(x^3 + x^4 + x^5 + \cdots + x^{12})^4$

    d. x^r di dalam $(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^r(1 - x)^r$

12. Carilah fungsi pembangkit dari a_n berikut:

    a. $a_n = 12$

    b. $a_n = 3n - 4$

    c. $a_n = n^2 3^n$

13. Carilah bentuk fungsi pembangkit yang paling sesuai dengan masing-masing barisan berikut ini.

    a. $0,2,2,2,2,2,2,0,0,0,0,0,\cdots$

    b. $0,0,0,1,1,1,1,1,1,\cdots$

    c. $1,1,0,1,1,1,1,1,1,\cdots$

    d. $0,0,0,1,2,3,4,\cdots$

    e. $2,4,8,18,32,64,128,256,\cdots$

    f. $2,-2,2,-2,2,-2,2,-2,\cdots$

14. Carilah koefisien x^{10} di dalam masing-masing fungsi di bawah ini.
    a. $(1+x^5+x^{10}+x^{15}+\cdots)^3$
    b. $(x^4+x^5+x^6+\cdots)^3$
    c. $(x^4+x^5+x^6)(x^3+x^4+x^5+x^6+x^7)(1+x+x^2+x^3+\cdots)$
    d. $(x^2+x^4+x^8+\cdots)(x^3+x^6+x^9+\cdots)(x^4+x^8+x^{12}+\cdots)$
15. Carilah koefisien x^{10} dari masing-masing fungsi di bawah ini.
    a. $1/(1-2x)$
    b. $1/(1+x)^2$
    c. $x^4/(1-3x)^3$

BAB VI
RELASI REKURENSI

Jumlah bakteri di dalam suatu koloni bertambah sebanyak dua kali lipat setiap jam. Jika suatu koloni terbentuk dari lima bakteri, berapakah jumlah bakteri di dalam koloni tersebut setelah *n* jam? Untuk menyelesaikan masalah ini, misalkan bahwa jumlah bakteri setelah *n* jam adalah a_n. Karena jumlah bakteri bertambah sebanyak dua kali lipat dalam satu jam, maka berlaku hubungan $a_n = 2a_{n-1}$ untuk setiap bilangan bulat positif *n*. Dengan syarat batas $a_0 = 5$, hubungan ini secara unik menentukan a_n untuk semua bilangan bulat non-negatif *n*. Rumusan a_n dapat diturunkan dari informasi tersebut.

Terdapat hubungan penting antara rekursi dengan relasi rekurensi. Algoritma rekursif memberikan penyelesaian dari suatu masalah yang berukuran *n* dalam bentuk penyelesaian dari satu atau lebih kasus pada masalah yang sama teetapi dengan ukuran lebih kecil. Sebagai akibatnya, jika kita menganalisa kompleksitas dari algoritma rekursif, akan diperoleh relasi rekurensi yang menyatakan banyaknya operasi yang diperlukan untuk menyelesaikan suatu masalah berukuran *n* sesuai dengan banyaknya operasi yang diperlukan untuk menyelesaikan masalah dari satu atau lebih kasus yang berukuran lebih kecil.

A. Definisi Rekursif Fungsi

Definisi rekursif dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah-masalah di dalam kombinatorika. Definisi rekursif dari suatu barisan menggunakan satu atau lebih suku awal sebagai syarat awal, dan suatu aturan tertentu untuk menentukan suku-suku selanjutnya. Definisi rekursif yang digunakan untuk menentukan suku-suku tertentu berdasarkan suku-suku yang mendahuluinya dinamakan relasi rekurensi.

Definisi 6.1. Suatu *relasi rekurensi* dari barisan $\{a_n\}$ adalah suatu persamaan yang menyatakan hubungan antara dengan suku-suku yang muncul lebih awal di dalam barisan tersebut, yaitu untuk semua bilangan bulat *n* dengan dengan adalah suatu bilangan bulat non-negatif. Suatu barisan merupakan penyelesaian dari suatu relasi rekurensi jika suku-suku barisan tersebut memenuhi sifat relasi rekurensi yang bersangkutan.

Misalkan dan Definisi rekursif dari fungsi *f* dengan domain *X* terdiri atas tiga bagian, dengan

- **Pernyataan Basis**. Ditetapkan nilai awal dari fungsi Persamaan yang memenuhi nilai awal tersebut dinamakan **syarat awal**.
- **Pernyataan rekursif**. Mencari suatu rumus untuk menghitung dari *k* nilai fungsi sebelumnya, yaitu Rumus ini dinamakan **relasi rekurensi** (atau **rumus relasi**).
- **Pernyataan akhir**. Nilai yang diperoleh adalah nilai fungsi yang valid. Penyataan ini bersifat mutlak, karena itu tidak harus digunakan di dalam definisi rekursif.

Teorema 6.1. Misalkan $a \in W,\ X = \{a, a+1, a+2, \cdots\},$ dan $k \in \mathbb{N}.$ Selanjutnya misalkan juga bahwa $f : X \to \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $f(a), f(a+1), f(a+2), \cdots, f(a+k+1)$ dapat diketahui. Jika $n \geq a+k$ adalah bilangan bulat positif sehingga $f(n)$ terdefinisi untuk $f(n-1), f(n-2), \cdots, f(n-k),$ maka $f(n-k)$ terdefinisi untuk semua $n \geq a.$

Contoh 6.1. Misalkan $\{a_n\}$ adalah suatu barisan yang memenuhi relasi rekurensi $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ untuk $n = 2, 3, 4, \cdots,$ dan misalkan bahwa $a_0 = 3$ dan $a_1 = 5.$ Tentukanlah a_2 dan $a_3.$

Jawab. Dapat dilihat dari relasi rekurensi bahwa $a_2 = a_1 - a_0 = 5 - 3 = 2$ dan juga $a_3 = a_2 - a_1 = 2 - 5 = -3$. Nilai-nilai untuk a_4, a_5, dan suku-suku selanjutnya dapat ditentukan dengan cara yang sama.

Syarat Awal untuk suatu barisan merupakan suku-suku yang mendahului suku pertama, dimana relasi rekurensi mulai berlaku. Pada Contoh 6.1, $a_0 = 3$ dan $a_1 = 5$ merupakan syarat-syarat awal. Relasi rekurensi dan syarat awal menentukan suatu barisan. Hal ini disebabkan karena relasi rekurensi bersama dengan syarat-syarat awal, menyatakan definisi rekursif dari suatu barisan. Sebarang suku pada barisan dapat ditentukan dari syarat awal dengan menggunakan relasi rekurensi beberapa kali. Meskipun demikian, terdapat cara yang lebih baik untuk menentukan suku-suku dalam kelompok tertentu pada barisan yang didefinisikan dengan relasi rekurensi dan syarat awal.

Contoh 6.2. Suatu pesta pernikahan dihadiri oleh *n* orang tamu. Setiap orang berjabat tangan tepat satu kali dengan semua orang lainnya. Definisikanlah secara rekursif banyaknya jabat tangan $h(n)$ yang dilakukan tamu yang hadir di pesta tersebut.

Jawab. Dari masalah ini, tentu saja $h(1) = 0$ karena itu andaikan $n \geq 2$. Misalkan A adalah salah satu tamu yang hadir. Berdasarkan definisi, banyaknya jabat tangan yang dapat dilakukan oleh $n-1$ tamu lainnya adalah $h(n-1)$. Jika A berjabat tangan dengan $n-1$ tamu lainnya tersebut, maka terjadi $h(n-1)+(n-1)$ jabat tangan, dengan $n \geq 2$. Jadi $h(n)$ dapat dinyatakan secara rekursif sebagai berikut:

$$\begin{array}{ll} h(1) = 0 & \leftarrow \text{syarat awal} \\ h(n) = h(n-1) + (n-1), n \geq 2 & \leftarrow \text{relasi rekurensi} \end{array}$$

Penyelesaian relasi rekurensi yang telah dijelaskan pada bagain sebelumnya, hanya dapat diaplikasikan pada beberapa masalah relasi rekurensi sederhana. Pada bagian ini akan dikembangkan metode penyelesaian relasi rekurensi yang lebih luas.

Contoh 6.3. Bunga Majemuk. Andaikan seseorang nasabah menabung uang Rp. 100.000.000 di bank yang memberikan bunga 11% per tahun, dengan bunga yang dibayarkan setiap tahun. Berapa total tabungan nasabah tersebut setelah menabung selama 30 tahun?

Jawab. Untuk menyelesaikan masalah ini, misalkanlah P_n sebagai jumlah tabungan setelah *n* tahun. Karena banyaknya tabungan setelah *n* tahun sama dengan total tabungan setelah *n* – 1 tahun ditambah bunga untuk tahun ke *n*, maka P_n dapat dinyatakan sebagai barisan $\{P_n\}$ yang memenuhi $P_n = P_{n-1} + 0{,}11P_{n-1} = (1{,}11)P_{n-1}$.

Diketahui syarat batas adalah $P_0 = 100.000.000$. Selanjutnya dapat digunakan pendekatan iteratif untuk menemukan suatu rumusan dari P_n. Perhatikan bahwa:

$$
\begin{aligned}
P_1 &= (1{,}11)P_0 \\
P_2 &= (1{,}11)P_1 = (1{,}11)^2 P_0 \\
P_3 &= (1{,}11)P_2 = (1{,}11)^3 P_0 \\
&\vdots \\
P_n &= (1{,}11)P_{n-1} = (1{,}11)^n P_0.
\end{aligned}
$$

Dengan syarat awal $P_0 = 100.000.000.$, maka $P_n = (1{,}11)^n P_0$ dapat diketahui. Validitas jawaban ini dapat dibuktikan dengan induksi matematika. Sebagai langkah basis, dapat dijelaskan bahwa rumus tersebut benar untuk $n = 0$ karena P_0 adalah syarat awal. Pada langkah hipotesis diasumsikan bahwa $P_n = (1{,}11)^n P_0$. Berdasarkan relasi rekurensi dan hipotesis induksi tersebut di atas, diperoleh

$$P_{n+1} = (1{,}11)P_n = (1{,}11)(1{,}11)^n P_0 = (1{,}11)^{n+1} P_0.$$

Hal ini menunjukkan bahwa rumus eksplisit untuk P_n adalah pernyataan yang benar. Subtitusi $n = 30$ ke dalam rumus $P_n = (1{,}11)^n P_0$ maka setelah 30 tahun, tabungan nasabah yang bersangkutan adalah $P_{30} = (1{,}11)^{30}(100.000.000) = 2.289.229.657{,}19$.

Contoh 6.4. Laju pertumbuhan populasi suatu negara adalah 2% per tahun. Carilah relasi rekurensi populasi setelah *n* tahun, jika diketahui jumlah populasi saat ini adalah P_0.

Jawab: Diketahui jumlah populasi saat ini adalah P_0. Pertumbuhan populasi 2% = 0,02 per tahun

Maka:

$$
\begin{aligned}
P_1 &= P_0 + 0,02P_0 = 1,02P_0 \\
P_2 &= P_1 + 0,02P_1 = 1,02P_0 + 0,02(1,02P_0) \\
&= 1,02P_0(1+0,02) = 1,02P_0(1,02) \\
&= (1,02)^2 P_0 \\
P_3 &= (1,02)^3 P_0 \\
&\vdots \\
P_n &= (1,02)^n P_0
\end{aligned}
$$

Contoh 6.5. Suatu bank membayar bunga 4,5% per tahun. Selain itu nasabah mendapatkan juga bonus \$100 setelah bunga dibayarkan. Tentukanlah relasi rekurensi untuk menyatakan jumlah akumulasi tabungan seorang nasabah setelah *n* tahun jika tabungan awalnya adalah \$200.

Jawab. Diketahui: $a_0 = 200, \text{bonus} = 100, \text{bunga} = 0.045$ maka,

$$
\begin{aligned}
a_1 &= a_0 + (0,045)a_0 + 100 \\
&= (1,045)a_0 + 100
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_2 &= (1,045)a_1 + 100 \\
&= (1,045)[(1,045)a_0 + 100] + 100 \\
&= (1,045)^2 a_0 + (1,045)(100) + 100 \\
&= (1,045)^2 a_0 + 100[(1,045) + 1)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_3 &= (1,045)^3 a_0 + 100(3,045) \\
&\vdots \\
a_n &= (1,045)^n a_0 + 100[(1,045)^{n-1} + (1,045)^{n-2} + (1,045)^{n-3} + \cdots + (1,045) + 1]
\end{aligned}
$$

Contoh 6.6. Enumerasi Kode. Suatu sistem komputer menerima string digit desimal sebagai kode password yang benar jika string tersebut mengandung digit yang terdiri atas sejumlah genap angka 0. Password 1024305462 dapat digunakan untuk mengakses kompoter sedangkan 10024305462 tidak bisa. Misalkan a_n adalah banyaknya kode password *n*-digit yang benar. Carilah relasi rekurensi untuk a_n.

Jawab. Perhatikan bahwa $a_1 = 9$ karena diketahui ada 10 digit tunggal dan hanya satu string 0 yang tidk valid. Relasi rekurensi dari barisan ini dapat dirumuskan dengan menentukan bagaimana suatu string *n*-digit yang valid dapat diperoleh dari $n-1$ digit. Ada dua cara yang dapat dilakukan.

Pertama, string valid yang terdiri atas *n* digit dapat diperoleh dengan menambahkan digit bukan nol terhadap suatu string valid yang terdiri atas $n-1$ digit. Cara ini dapat dilakukan dalam 9 cara. Karena itu suatu berdasarkan cara ini, string valid yang terdiri atas *n* digit dapat dibentuk dengan $9a_{n-1}$ cara.

Kedua, string valid *n*-digit dapat diperoleh dengan menambahkan digit 0 terhadap suatu string invalid yang terdiri atas $n-1$ digit. Hal ini akan menghasilkan string yang terdiri atas digit 0 berjumlah genap, karena string invalid yang panjangnya $n-1$ digit memiliki angka 0 yang berjumlah ganjil. Cara ini dapat dilakukan sebanyak jumlah $(n-1)-\text{digit}$ string yang invalid. Karena ada sebanyak 10^{n-1} string yang panjangnya $n-1$ dan a_{n-1} di antaranya adalah string yang valid, maka ada $10^{n-1}-a_{n-1}$ string *n*-digit valid yang diperoleh dengan cara menambahkan digit 0 pada string invalid yang panjangnya $n-1$ digit. Karena semua string valid tersebut di atas panjangnya *n*-digit dan diperoleh dari salah satu dari kedua cara di atas, maka dapat disimpulkan bahwa banyaknya string valid yang terdiri atas *n*-digit adalah

$$\begin{aligned} a_n &= 9a_{n-1} + (10^{n-1} - a_{n-1}) \\ &= 8a_{n-1} + 10^{n-1} \end{aligned}$$

Contoh 6.7. Carilah relasi rekurensi untuk C_n yaitu banyaknya cara memasang tanda kurung untuk perkalian dari $n+1$ bilangan, yaitu $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$, untuk menandai orde perkalian. Sebagai contoh, $C_3 = 5$ karena ada lima cara memasang tanda kurung untuk menandai orde perkalian bilangan-bilangan $x_{0,} x_1, x_2, x_3$:

$$\begin{array}{lll} ((x_0 \cdot x_1)\cdot x_2)\cdot x_3 & (x_0 \cdot (x_1 \cdot x_2))\cdot x_3 & (x_0 \cdot x_1)\cdot (x_2 \cdot x_3) \\ x_0 \cdot ((x_1 \cdot x_2)\cdot x_3) & x_0 \cdot (x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3)) & \end{array}$$

Jawab: Untuk menyusun relasi rekurensi dari C_n, dapat dilihat bahwa dengan cara yang bagaimanapun menempatkan tanda kurung untuk menyatakan orde perkalian pada $x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdots\cdot x_n$, selalu terdapat satu operator "$\cdot$" yang berada di luar cakupan semua tanda kurung, yaitu operator perkalian yang terakhir dilakukan. Operator ini muncul di antara dua dari $n+1$ bilangan, misalnya antara x_k dan x_{k+1}. Terdapat $C_k C_{n-k-1}$ cara untuk memasang tanda kurung dari $n+1$ bilangan yang akan dikalikan, jika operator yang terakhir muncul di antara x_k dan x_{k+1} karena terdapat C_k cara memasang tanda kurung dalam perkalian bilangan-bilangan $x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots \cdot x_k$ dan terdapat C_{n-k-1} cara memasang tanda kurung dalam perkalian bilangan-bilangan $x_{k+1} \cdot x_{k+2} \cdot x_{k+3} \cdots \cdot x_n$ untuk menentukan orde perkalian dari $n-k$ bilangan yang akan diperkalikan. Karena operator terakhirnya muncul di antara sebarang dua $n+1$ bilangan, maka:

$$\begin{aligned} C_n &= C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \cdots C_{n-2} C_1 + C_{n-1} C_0 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}. \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa syarat awal yang digunakan adalah $C_0 = 1$ dan $C_1 = 1$. Relasi rekurensi ini dapat diselesaikan dengan menggunakan metode fungsi pembangkit sehingga diperoleh $C_n = C(2n, n)/(n+1)$.

Sebelum membahas lebih lanjut mengenai penyelesaian relasi rekurensi, di bawah ini akan dijelaskan teknik dekomposisi pecahan parsial yang digunakan di dalam kalkulus. Teknik dekomposisi dapat diterapkan untuk mengubah bentuk $p(x)/q(x)$ menjadi bentuk jumlahan dari dua polinomial, dimana derajat $p(x)$ lebih rendah dari $q(x)$ misalnya

$$\frac{6x+1}{(2x-1)(2x+3)} = \frac{1}{2x-1} + \frac{2}{2x+3}$$

B. Dekomposisi Pecahan Parsial

Jika pecahan pasrial $p(x)/q(x)$ diketahui dengan derajat $p(x)$ lebih rendah dari pada derajat $q(x)$ dan $q(x)$ memiliki faktor yang berbentuk $(ax+b)^m$, maka dekomposisinya mengandung jumlahan yang berbentuk

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(ax+b)^m} \tag{6.84}$$

dengan A_i merupakan suatu bilangan rasional. Pada tahap ini mahasiswa sudah dapat menerapkan dekomposisi pecahan parsial dan fungsi pembangkit untuk menyelesaikan relasi rekurensi.

Contoh 6.8. Nyatakanlah $\frac{x}{(1-x)(1-2x)}$ sebagai jumlah dari pecahan parsial tertentu.

Jawab: Karena penyebut mengandung dua faktor linier, maka dapat diasumsikan

$$\frac{x}{(1-x)(1-2x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1-2x}$$

Untuk menentukan nilai A dan B, maka kedua sisi dari kesamaan di atas dikalikan dengan $(1-x)(1-2x)$ sehingga diperoleh:

$$x = A(1-2x) + B(1-x)$$
$$x = A - 2Ax + B - Bx = (A+B) + (-2A-B)x$$
$$\Leftrightarrow (A+B) = 0 \text{ dan } (\text{-2A-B}) = 1$$
$$\Leftrightarrow A = -B \text{ sehingga } -2(-B) - B = 1, B = 1 \Rightarrow A = -1$$

Jadi,

$$\frac{x}{(1-x)(1-2x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1-2x} = \frac{-1}{1-x} + \frac{1}{1-2x}$$

Contoh 6.9. Nyatakanlah $\frac{x}{1-x-x^2}$ sebagai jumlahan dari pecahan parsial tertentu.

Jawab: Pertama, faktorkan $1-x-x^2$ sebagai berikut:

$$1-x-x^2 = (1-\alpha x)(1-\beta x)$$

dimana $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ dan $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Perhatikan bahwa $\alpha+\beta = 1$, $\alpha\beta = 1$, dan $\alpha - \beta = \sqrt{5}$.

Selanjutnya misalkan bahwa

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{x}{(1-\alpha x)(1-\beta x)} = \frac{A}{(1-\alpha x)} + \frac{B}{(1-\beta x)}$$

maka

$$x = A(1-\beta x) + B(1-\alpha x) = (A+B) + (-\beta A - \alpha B)x$$
$$\Leftrightarrow (A+B) = 0 \text{ dan } -\beta A - \alpha B = 1$$
$$\Leftrightarrow A = -B \text{ dan } -\beta(-B) - \alpha B = 1 \Rightarrow (\beta - \alpha)B = 1$$
$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ dan } \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow (\beta - \alpha) = -\sqrt{5}.$$
$$B = -\frac{1}{\sqrt{5}},\ A = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Jadi,

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\alpha x} - \frac{1}{1-\beta x}\right)$$

Contoh 6.10. Nyatakanlah $\frac{2-9x}{1-6x+9x^2}$ sebagai jumlahan dari pecahan parsial tertentu.

Jawab: Seperti pada Contoh 6.9, langkah pertama menyelesaikan masalah ini adalah dengan memfaktorkan penyebut $1-6x+9x^2 = (1-3x)^2$. Berdasarkan aturan dekomposisi,

$$\frac{2-9x}{1-6x+9x^2} = \frac{A}{1-3x} + \frac{B}{(1-3x)^2}$$

Sehingga $2-9x = A(1-3x)+B$. Dari sini akan diperoleh A= 3 dan B = -1.

Oleh karena itu

$$\frac{2-9x}{1-6x+9x^2} = \frac{3}{1-3x} - \frac{1}{(1-3x)^2}\frac{2-9x}{1-6x+9x^2} = \frac{3}{1-3x} - \frac{1}{(1-3x)^2}$$

C. Relasi Rekurensi dan Fungsi Pembangkit Rasional

Barisan Fibonacci didefinisikan dengan relasi rekurensi linier $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Dengan menggunakan relasi ini bersama dengan dua suku pertama dari barisan tersebut maka fungsi pembangkit dapat dirumuskan secara eksplisit. Fungsi pembangkit tersebut merupakan fungsi rasional, yaitu rasio dari dua polinomial. Penurunan fungsi pembangkit tersebut tidak menggunakan bentuk khusus dari relasi rekurensi. Dengan cara yang sama dapat dibuktikan teorema yang menyerupai fungsi pembangkit dari sebarang barisan yang dihasilkan dari relasi rekurensi linier.

B.7. Penyelesaian Relasi Rekurensi

Definisi rekursif dari suatu fungsi *f* tidak memberikan rumusan yang eksplisit untuk $f(n)$ tetapi memberikan prosedur sistematis untuk menentukan $f(n)$ itu sendiri. Pada bagian ini akan digambarkan suatu metode iteratif dalam mencari rumus $f(n)$ dari bentuk relasi rekurensi sederhana. Menyelesaikan relasi rekurensi dari fungsi *f* artinya mencari rumusan eksplisit untuk $f(n)$. Metode iterasi untuk menyelesaikan relasi rekurensi terdiri atas dua langkah:

- Menerapkan rumus rekurensi secara iteratif dan mencari suatu pola tertentu untuk memperkirakan rumus eksplisit.
- Menggunakan induksi untuk membuktikan bahwa rumus tersebut berlaku untuk semua nilai yang mungkin dari bilangan bulat *n*.

Definisi 6.2. Suatu relasi rekurensi homogen linier yang berderajat *k* dan berkoefisien konstan adalah relasi rekurensi yang berbentuk

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}, \tag{6.85}$$

dimana $c_1, c_2, c_3, \cdots, c_k$ adalah bilangan-bilangan real dan $c_k \neq 0$.

Relasi rekurensi di dalam definisi dikatakan **linier** karena ruas kanan di dalam persamaan tersebut merupakan jumlahan dari suku-suku yang muncul lebih dulu di dalam barisan. Relasi rekurensi juga dikatakan **homogen** karena tidak ada suku yang muncul yang bukan kelipatan dari a_j. Semua koefisien suku-suku dalam barisan tersebut adalah **konstan**, bukan fungsi yang nilainya bergantung pada *n*. **Derajat** dari relasi rekurensi adalah *k* karena a_n dinyatakan sebagai barisan yang suku-sukunya ditentukan oleh suku-suku yang mendahuluinya.

Konsekuensi dari prinsip kedua induksi matematika adalah bahwa suatu barisan yang memenuhi relasi rekurensi di dalam definisi ditentukan secara unik oleh relasi rekurensi ini dan *k* syarat-syarat awal:

$a_0 = C_0, a_1 = C_1, \cdots, a_{k-1} = C_{k-1}.$

Suatu relasi rekurensi linier berkoefisien konstan dapat dinyatakan dalam bentuk $C_0 a_n + C_1 a_{n-1} + \ \ldots \ + C_k a_{n-k} = f(n).$ Jika $f(n) = 0,$ maka diperoleh relasi rekurensi yang memenuhi

$C_0 a_n + C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \ \ldots \ + C_k a_{n-k} = 0.$

Relasi rekurensi seperti ini dinamakan relasi rekurensi homogen dan penyelesaiannya dinamakan penyelesaian homogen. Untuk mencari penyelesaian dari suatu relasi rekurensi perlu diketahui dua jenis penyelesaian, yaitu:

1. Penyelesaian homogen yang diperoleh dari relasi rekurensi linier dengan memilih nilai $f(n) = 0.$
2. Penyelesaian khusus yang memenuhi relasi rekurensi sebenarnya.

Penyelesaian total dari suatu relasi rekurensi adalah jumlah dari penyelesaian homogen dan penyelesaian khusus. Misalkan $a_n{}^{(h)} = \left(a_0{}^{(h)},\ a_1{}^{(h)},\ \ldots\right)$ adalah penyelesaian homogen yang diperoleh dan $a_n{}^{(p)} = \left(a_0{}^{(p)},\ a_1{}^{(p)},\ \ldots\right)$ adalah penyelesaian khusus yang diperoleh, maka penyelesaian total dari relasi rekurensi yang dimaksud adalah

$$a_n = a^{(h)} + a^{(p)} \tag{6.86}$$

Berikut ini adalah relasi rekurensi homogen linier dengan derajat tertentu. Relasi rekurensi $P_n = (1,11)P_{n-1}$ merupakan suatu relasi rekurensi homogen linier berderajat satu. Relasi rekurensi $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ merupakan relasi rekurensi homogen linier berderajat dua. Relasi rekurensi $a_n = a_{n-5}$ merupakan relasi rekurensi homogen linier berderajat lima.

Beberapa sifat relasi rekurensi. Relasi rekurensi $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}^2$ tidak linier. Relasi rekurensi $H_n = 2H_{n-1} + 1$ tidak homogen. Relasi rekurensi $B_n = nB_{n-1}$ tidak memiliki koefisien konstan.

Teorema 6.2. Misalkan suatu barisan a_n dinyatakan sebagai relasi rekurensi linier berderajat *k* dan berkoefisien konstan $c_1, c_2, c_3, \cdots, c_k,$

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \cdots + c_k a_n, \tag{6.87}$$

dan misalkan elemen-elemen $a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{k-1}$, diketahui. Maka fungsi pembangkit $A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots$ adalah rasional, karena $A(s) = P(s)/Q(s)$, dimana Q adalah suatu polinomial berderajat k, dan P adalah suatu polinomial berderajat paling tinggi $k - 1$.

Bukti. Pembuktian Teorema 6.2. sama dengan penjelasan untuk barisan Fibonacci. Dengan mengalikan fungsi pembangkit $A(s)$ dengan $c_1 s + c_2 s^2 + \cdots + c_k s^k$ maka diperoleh:

$$\begin{aligned}
&(c_1 s + c_2 s^2 + \cdots + c_k s^k) A(s) \\
&\quad = c_1 a_0 s + c_1 a_1 s^2 + c_1 a_2 s^3 + \cdots + c_1 a_{k-1} s^k + \cdots \\
&\qquad\qquad + c_2 a_0 s^2 + c_2 a_1 s^3 + \cdots + c_2 a_{k-2} s^k + \cdots \\
&\qquad\qquad\qquad + c_3 a_0 s^3 + \cdots + c_3 a_{k-3} s^k + \cdots \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + c_k a_0 s^k + \cdots \\
&\quad = P(s) + A(s),
\end{aligned}$$

dimana derajat polinomial P paling tinggi sama dengan k – 1. Artinya, koefisien dari s^{n+k} pada ruas kanan dari identitas pertama sama dengan ruas kanan Persamaan 6.2. dengan demikian Teorema 6.2 terbukti. Pada teorema tertentu telah ditunjukkan suatu pernyataan yang lebih spesifik, membuktikan bahwa polinomial Q adalah

$$Q(s) = 1 - c_1 s - c_2 s^2 - \cdots - c_k s^k. \tag{6.88}$$

Penurunan vektor fungsi pembangkit untuk barisan Fibonacci juga menunjukkan generalisasi langsung pada kasus sebarang barisan rekursif. Pada kasus umum, vektor dua dimensi harus diganti dengan vektor k-dimensi

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ \vdots \\ a_{n+k-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k,$$

dan transformasi matriks A yang terkait dengan relasi rekurensi akan didapatkan dalam bentuk

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ \vdots \\ a_{n+k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ c_k & c_{k-1} & c_{k-2} & \cdots & c_2 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ \vdots \\ a_{n+k-1} \end{pmatrix} \tag{6.89}$$

Hasilnya adalah vektor fungsi pembangkit

$$\bar{A}(s) = (I - sA)^{-1} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{k-1} \end{pmatrix}. \tag{6.90}$$

Contoh 6.11. Gunakan fungsi pembagkit untuk menyelesaikan relasi rekurensi $b_n = 2b_{n-1} + 1,$ dengan $b_1 = 1.$

Jawab: Perhatikan bahwa syarat $b_1 = 1$ menghasilkan $b_0 = 0.$ Untuk menentukan barisan b_n yang memenuhi relasi rekurensi tersebut di atas, perhatikan fungsi pembangkit yang bersesuaian:

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \cdots + b_nx^n + \cdots$$

maka

$$2g(x) = 2b_1x^2 + 2b_2x^3 + \cdots + 2b_{n-1}x^n + \cdots$$

Demikian juga,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$

maka

$$\begin{aligned} g(x) - 2xg(x) - \frac{1}{1-x} &= -1 + (b_1 - 1)x + (b_2 - 2b_1 - 1)x^2 + \cdots \\ &\quad + (b_n - 2b_{n-1} - 1)x^n + \cdots \\ &= -1 \end{aligned}$$

Karena $b_1 = 1$ dan $b_n = 2b_{n-1} + 1$ untuk $n \geq 2,$

$$(1-2x)g(x) = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}$$

maka

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{x}{(1-x)(1-2x)} = -\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-2x} \\ &= -\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (2^n - 1)x^n. \end{aligned}$$

Tetapi karena

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \text{ maka } b_n = 2^b - 1, n \geq 1.$$

Contoh 6.12. Dengan menggunakan fungsi pembangkit, tentukan relasi rekurensi Fibonacci $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ dimana $F_1 = 1 = F_2$.

Jawab: Perhatikan bahwa kedua syarat awal menghasilkan $F_0 = 0$. Selanjutnya misalkan $g(x) = F_0 + F_1 x + F_2 x^2 + \cdots + F_n x^n + \cdots$ adalah fungsi pembangkit dari barisan Fibonacci. Karena orde dari F_{n-1} dan F_{n-2} masing-masing lebih rendah sebanyak 1 dan 2 dari orde F_n maka diperoleh

$$\begin{aligned} xg(x) &= F_1 x^2 + F_2 x^3 + F_3 x^4 + \cdots + F_{n-1} x^n + \cdots \\ x^2 g(x) &= F_1 x^3 + F_2 x^4 + F_3 x^5 + \cdots + F_{n-2} x^n + \cdots \end{aligned}$$

Maka,

$$\begin{aligned} g(x) - xg(x) - x^2 g(x) &= F_1 x + (F_2 - F_1)x^2 + (F_3 - F_2 - F_1)x^3 + \cdots \\ &= (F_n - F_{n-1} - F_{n-2})x^n + \cdots \\ &= x \end{aligned}$$

Karena

$F_2 = F_1$ dan $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

Dengan demikian

$$\begin{aligned}(1-x-x^2)g(x) &= x\\ g(x) &= \frac{x}{1-x-x^2}\\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\alpha x}-\frac{1}{1-\beta x}\right)\end{aligned}$$

Dimana

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ dan } \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Selanjutnya

$$\begin{aligned}\sqrt{5}g(x) &= \frac{1}{1-\alpha x}-\frac{1}{1-\beta x}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n x^n - \sum_{n=0}^{\infty}\beta^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\alpha^n-\beta^n\right)x^n\end{aligned}$$

Maka

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha^n-\beta^n)}{\sqrt{5}}x^n$$

Sehingga berdasarkan kesamaan fungsi pembangkit,

$$F_n = \frac{\alpha^n-\beta^n}{\sqrt{5}} = \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$$

Yang merupakan bentuk Binet dari F_n.

Contoh 6.13. Selesaikanlah relasi rekurensi $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ dimana $a_0 = 2$ dan $a_1 = 3$.

Jawab: Misalkan $g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$

maka

$$6xg(x) = 6a_0x + 6a_1x^2 + 6a_2x^3 + \cdots + 6a_{n-1}x^n + \cdots$$

dan

$$9x^2g(x) = 9a_0x^2 + 9a_1x^3 + 9a_2x^4 + \cdots + 9a_{n-2}x^n + \cdots$$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned} g(x) - 6xg(x) - 9x^2g(x) &= a_0 + (a_1 - 6a_0)x + (a_2 - 6a_1 - 9a_0)x^2 + \cdots \\ &\quad + (a_n - 6a_{n-2} + 9a_{n-2})x^2 + \cdots \\ &= 2 - 9x \end{aligned}$$

sesuai dengan syarat batas yang diberikan. Jadi $(1 - 6x + 9x^2)g(x) = 2 - 9x$

Dengan demikian

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{2-9x}{1-6x+9x^2} \\ &= \frac{3}{1-3x} - \frac{1}{(1-3x)^2} \\ &= 3\left(\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n\right) - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)3^n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[3^{n+1} - (n+1)3^n\right]x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n(2-n)x^n \end{aligned}$$

Jadi $a_n = (2-n)3^n, n \geq 0.$

Contoh 6.14. Buktikan bahwa $C_1 3^n + C_2(-2)^n$ adalah penyelesaian umum dari $a_n - a_{n-1} - 6a_{n-2} = 0$

Bukti

Cara I: $a_n - a_{n-1} - 6a_{n-2} = 0$ dapat dinyatakan dalam bentuk yang ekivalen, yaitu

$$a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$$

Penyelesaian relasi rekurensi ini berbentuk

$$a_n = r^n,$$

jika dan hanya jika

$$r^n = \alpha_1 r^{n-1} + \alpha_2 r^{n-2}$$

dengan

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 6$$

Jadi

$$r^n = r^{n-1} + 6r^{n-2}$$

Selanjutnya, jika kedua ruas dikali dengan $\frac{1}{r^{n-2}}$ maka akan diperoleh

$$\frac{r^n}{r^{n-2}} = \frac{r^{n-1}}{r^{n-2}} + \frac{6r^{n-2}}{r^{n-2}}$$

sehingga persamaan karakteristiknya

$$r^2 = r + 6 \Leftrightarrow r^2 - r - 6 = 0 \Leftrightarrow (r-3)(r+2) = 0$$

Jadi akar-akar karakteristiknya adalah $r = 3$ atau $r = -2$

Dan penyelesaiannya adalah

$$\begin{aligned} a_n &= C_1(r_1)^n + C_2(r_2)^n \\ &= C_1(3)^n + C_2(-2)^n \end{aligned}$$

Cara II: Perhatikan bahwa $C_1 3^n + C_2(-2)^n$ adalah solusi umum dari $a_n - a_{n-1} - 6a_{n-2} = 0$ untuk sebarang C_1 dan C_2.

Misalkan $a_n = C_1 3^n + C_2(-2)^n$

maka $\left[C_1 3^n + C_2(-2)^n\right] - \left[C_1 3^{n-1} + C_2(-2)^{n-1}\right] - 6\left[C_1 3^{n-2} + C_2(-2)^{n-2}\right] = 0$

$$\left[C_1 3^n - C_1 3^{n-1} - 6C_1 3^{n-2}\right] + \left[C_2(-2)^n - C_2(-2)^{n-1} - 6C_2(-2)^{n-2}\right] = 0$$

$$C_1 3^n \left[1 - \frac{1}{3} - \frac{6}{9}\right] + C_2(-2)^n \left[1 - \frac{1}{(-2)} - \frac{6}{4}\right] = 0$$

$$C_1 3^n \left[\frac{9}{9} - \frac{3}{9} - \frac{6}{9}\right] + C_2(-2)^n \left[\frac{4}{4} + \frac{2}{4} - \frac{6}{4}\right] = 0$$

$$C_1 3^n (0) + C_2(-2)^n (0) = 0$$

Dari persamaan di atas, maka berlaku untuk sebarang C_1 dan C_2.

Jadi $C_1 3^n + C_2(-2)^n$ adalah penyelesaian umum dari $a_n - a_{n-1} - 6a_{n-2} = 0$.

Contoh 6.15. Buktikan bahwa $C_1 2^n + C_2 n 2^n$ adalah penyelesaian umum dari $a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0$

Bukti: Cara I.

Persamaan $a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0$ dapat dinyatakan dalam bentuk yang ekivalen, yaitu:

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$$

sehingga

$$r^n = \alpha_1 r^{n-1} + \alpha_2 r^{n-2}$$

dengan

$\alpha_1 = 4, \quad \alpha_2 = -4$

Jadi,

$r^n = 4r^{n-1} - 4r^{n-2}$

Jika persamaan ini dikali dengan $\frac{1}{r^{n-2}}$ maka akan diperoleh

$$\frac{r^n}{r^{n-2}} = \frac{4r^{n-1}}{r^{n-2}} - \frac{4r^{n-2}}{r^{n-2}}$$

atau

$$r^2 = 4r - 4 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 - 4r + 4 = 0$$
$$(r-2)(r-2) = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 2.$$

Penyelesaian untuk akar-akar yang sama,

$$a_n = C_1(r_1)^n + C_2(r_2)^n = C_1(2)^n + C_2(2)^n$$

Cara II: Perhatikan bahwa $C_1 2^n + C_2 n 2^n$ adalah penyelesaian umum dari

$$a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0$$

jika berlaku sebarang C_1 dan C_2.

Misalkan

$$a_n = C_1 2^n + C_2 n 2^n$$

maka

$$\left[C_1 2^n + C_2 n 2^n\right] - 4\left[C_1 2^{n-1} + C_2 (n-1) 2^{n-1}\right] + 4\left[C_1 2^{n-2} + C_2 (n-2) 2^{n-2}\right] = 0$$

$$\left[C_1 2^n - 4C_1 2^{n-1} + 4C_1 2^{n-2}\right] + \left[C_2 n 2^n - 4C_2 (n-1) 2^{n-1} + 4C_2 (n-2) 2^{n-2}\right] = 0$$

$$C_1 2^n [1 - 2 + 1] + C_2 2^n \left[n - 2(n-1) + (n-2)\right] = 0$$

$$C_1 2^n [0] + C_2 2^n [0] = 0$$

Dari persamaan di atas, maka berlaku untuk sebarang C_1 dan C_2.

Jadi

$$C_1 2^n + C_2 n 2^n$$

adalah penyelesaian umum dari

$$a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0.$$

Contoh 6.16. Selesaikan relasi rekurensi dari $a_1 = 2, \quad a_2 = 6, a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0,$ $n \geq 3.$

Jawab: Dengan menggunakan persamaan karakteristik maka diperoleh $x^2 - 4x + 4 = 0,$ dengan akar-akarnya adalah $x = 2$ dan $x = 2$. Sehingga penyelesaian umumnya adalah $C_1 2^n + C_2 n 2^n$, karena mempunyai dua akar yang sama.

$n = 1$, maka $2C_1 + 2C_2 = 2$, karena $a_1 = 2$.

$n = 2$, maka $4C_1 + 8C_2 = 6$, karena $a_2 = 6$.

Dari kedua persamaan maka diperoleh $C_1 = \frac{1}{2}$ dan $C_2 = \frac{1}{2}$.

Sehingga penyelesaian dari relasi rekurensi di atas adalah $\frac{1}{2} 2^n + \frac{1}{2} n 2^n = 2^{n-1} + n 2^{n-1}$

Contoh 6.17. Selesaikan relasi rekurensi dari $a_1 = 5, \quad a_2 = -5, a_n + 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 0,$ $n \geq 3.$

Jawab: Dengan menggunakan persamaan karakteristik maka diperoleh $x^2 + 6x + 9 = 0,$ yang akar-akarnya adalah $x = -3$ dan $x = -3$. Sehingga penyelesaian umumnya adalah $C_1 (-3)^n + C_2 n (-3)^n$, karena mempunyai dua akar yang sama.

$n = 1$, maka $-3C_1 - 3C_2 = 5$, karena $a_1 = 5$.

n = 2 , maka $9C_1 + 18C_2 = -5$, karena $a_2 = -5$.

Dari kedua persamaan maka diperoleh $C_1 = -\frac{25}{9}$ dan $C_2 = \frac{10}{9}$.

Sehingga penyelesaian relasi rekurensi tersebut adalah

$$-\frac{25}{9}(-3)^n + \frac{10}{9}n(-3)^n = (10n - 25n)(-1)^n (3)^{n+2}$$

Contoh 6.18. Selesaikan relasi rekurensi dari

$a_0 = 0,\ a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_n - 6a_{n-1} + 12a_{n-2} = 8a_{n-3},\ n \geq 3$

Jawab: Cara I. Menggunakan Fungsi Pembangkit

Misalkan penyelesaian a_n dengan menggunakan fungsi pembangkit adalah

$$g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n .$$

rekurensi $a_n - 6a_{n-1} + 12a_{n-2} - 8a_{n-3} = 0$, $n \geq 3$ kalikan kedua sisi dengan x^n, maka diperoleh $a_n x^n - 6a_{n-1}x^n + 12a_{n-2}x^n - 8a_{n-3}x^n = 0$, $n \geq 3$.

Jumlahkan kedua sisi dimulai dari n = 3, sehingga diperoleh

$$\sum_{n=3}^{\infty} a_n x^n - 6\sum_{n=3}^{\infty} a_{n-1}x^n + 12\sum_{n=3}^{\infty} a_{n-2}x^n - 8\sum_{n=3}^{\infty} a_{n-3}x^n = 0 .$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=3}^{\infty} a_n x^n &= a_3x^3 + a_4x^4 + ... \\ &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ...) - a_0 - a_1x - a_2x^2 . \\ &= g(x) - a_0 - a_1x - a_2x^2\end{aligned}$$

Dengan demikian $\sum_{n=3}^{\infty} a_n x^n = g(x) - a_0 - a_1x - a_2x^2$.

$$\begin{aligned}\sum_{n=3}^{\infty} a_{n-1}x^n = a_2x^3 + a_3x^4 + ... &= (a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + a_3x^4 + ...) - a_0x - a_1x^2 \\ &= x(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ...) - a_0x - a_1x^2 \\ &= x[g(x)] - a_0x - a_1x^2 = x[g(x) - a_0 - a_1x]\end{aligned}$$

Sehingga $\sum_{n=3}^{\infty} a_{n-1}x^n = x[g(x) - a_0 - a_1x]$

$$\sum_{n=3}^{\infty} a_{n-2}x^n = a_1x^3 + a_2x^4 + \ldots$$

$$= x^2\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots\right) - a_0x^2$$

$$= x^2\left[g(x) - a_0\right]$$

Sehingga

$$\sum_{n=3}^{\infty} a_{n-2}x^n = x^2\left[g(x) - a_0\right]$$

Demikian juga

$$\sum_{n=3}^{\infty} a_{n-3}x^n = a_0x^3 + a_1x^4 + \ldots = x^3\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots\right) = x^3\left[g(x)\right]$$

Menunjukkan bahwa $\sum_{n=3}^{\infty} a_{n-3}x^n = x^3\left[g(x)\right]$

$$\sum_{n=3}^{\infty} a_nx^n - 6\sum_{n=3}^{\infty} a_{n-1}x^n + 12\sum_{n=3}^{\infty} a_{n-2}x^n - 8\sum_{n=3}^{\infty} a_{n-3}x^n = 0$$

$$\left[g(x) - a_0 - a_1x - a_2x^2\right] - 6x\left[g(x) - a_0 - a_1x\right] + 12x^2\left[g(x) - a_0\right] - 8x^3\left[g(x)\right] = 0$$

$$\left[1 - 6x + 12x^2 - 8x^3\right]g(x) + \left[6a_1 - 12a_0 - a_2\right]x^2 + \left[6a_0 - a_1\right]x - a_0 = 0$$

$$\left[1 - 6x + 12x^2 - 8x^3\right]g(x) = a_0 - \left[6a_1 - 12a_0 - a_2\right]x^2 - \left[6a_0 - a_1\right]x$$

$$g(x) = \frac{a_0 - \left[6a_1 - 12a_0 - a_2\right]x^2 - \left[6a_0 - a_1\right]x}{\left[1 - 6x + 12x^2 - 8x^3\right]}, \ a_0 = 0 \ a_1 = 0, \ a_2 = 1 \text{ maka}$$

$$g(x) = \frac{x^2}{\left[1 - 6x + 12x^2 - 8x^3\right]} = \frac{x^2}{(1-2x)^3}.$$

dan

$$g(x) = \frac{x^2}{(1-2x)^3}$$

Dengan menggunakan identitas

$$\frac{1}{(1-2x)^3} = \left(1 + 2x + (2x)^2 + (2x)^3 + \ldots\ldots\right)^3 = 1 + \binom{3}{1}2x + \binom{4}{2}(2x)^2 + \binom{5}{3}(2x)^3 + \ldots, \text{maka}$$

$$g(x)=\frac{x^2}{(1-2x)^3}=x^2\left[1+\binom{3}{1}2x+\binom{4}{2}(2x)^2+\binom{5}{3}(2x)^3+...\right]$$

$$=\left[x^2+\binom{3}{1}2x^3+\binom{4}{2}2^2x^4+\binom{5}{3}2^3x^5+...+\binom{n}{n-2}2^{n-2}x^n+...\right]$$

Sehingga koefisien x^n adalah $\binom{n}{n-2}2^{n-2}=(2)^{n-2}\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]=(2)^{n-3}(n(n-1))$.

Jadi $a_n=(2)^{n-3}(n(n-1))$.

Cara II. Menggunakan persamaan karakteristik

Dengan menggunakan persamaan karakteristik diperoleh $x^3-6x^2+12x-8=0$, yang akar-akarnya $x_1=x_2=x_3=2$. Jadi solusi umumnya adalah $C_1 2^n+C_2 n2^n+C_3 n^2 2^n$, karena mempunyai tiga akar yang sama.

$n=0$, maka $C_1=0$, karena $a_0=0$.

$n=1$, maka $2C_1+2C_2+2C_3=0$ atau, karena $a_1=0$.

$n=2$, maka $4C_1+8C_2+16C_3=2$, karena $a_2=1$.

Dari kedua persamaan maka diperoleh $C_1=0$, $C_2=-\frac{1}{8}$ dan $C_3=\frac{1}{8}$.

Sehingga penyelesaian dari relasi rekurensi di atas adalah $a_n=n2^{n-3}+n^2 2^{n-3}$.

B.8. Penyelesaian Homogen Dari Relasi Rekurensi

Penyelesaian homogen dari suatu relasi rekurensi linier dapat ditentukan dengan memilih nilai $f(n)=0$. Penyelesaian homogen dari suatu persamaan diferensial linier dengan koefisien konstan dinyatakan dalam bentuk $A\alpha^n$, dimana α adalah akar karakteristik dan A adalah konstanta yang nilainya akan ditentukan kemudian untuk memenuhi syarat batas yang diberikan. Substitusi $A\alpha^n$ untuk a_n dari persamaan homogen $C_0a_n+C_1a_{n-1}+C_2a_{n-2}+\ \dots+C_ka_{n-k}=0$, diperoleh

$$C_0Aa^n+C_1Aa^{n-1}+C_2Aa^{n-2}+\ \dots\ +C_kAa^{n-k}=0. \tag{6.91}$$

Dengan penyederhanakan persamaan tersebut, diperoleh

$$C_0a^n+C_1a^{n-1}+C_2a^{n-2}+\dots+C_ka^{n-k}=0 \tag{6.92}$$

Persamaan ini merupakan persamaan karakteristik dari persamaan diferensial yang diberikan. Jadi Jika α adalah akar karakteristik dari persamaan karakteristik ini, maka Aa^{n} akan memenuhi persamaan homogen. Jadi, penyelesaian homogen yang dicari akan berbentuk Aa^{n}. Jika persamaan karakteristik memiliki *k* akar karakteristik yang berbeda $(a_1 \neq a_2 \neq \ldots \neq a_k)$, maka penyelesaian homogen dari relasi rekurensi yang dimaksud adalah

$$a_n^{(h)} = A_1 a_1^{\,n} + A_2 a_2^{\,n} + \ \ldots\ + A_k a_k^{\,n} \qquad (6.93)$$

dimana α_i adalah akar karakteristik dari persamaan karakeristik yang diperoleh, sedangkan A_i adalah konstanta yang akan dicari untuk memenuhi syarat batas yang ditentukan.

Contoh 6.19. Tentukan penyelesaian homogen dari relasi rekurensi $b_n + b_{n-1} - 6b_{n-2} = 0$ dengan syarat batas $b_0 = 0,\ \ b_1 = 1.$

Jawab. Relasi rekurensi tersebut adalah relasi rekurensi homogen, karena f(n)=0. Persamaan karakteristik dari relasi rekurensi $b_n + b_{n-1} - 6b_{n-2} = 0$ adalah

$\alpha^2 + \alpha - 6 = 0 \qquad \text{atau} \qquad (\alpha + 3)(\alpha - 2) = 0$

hingga diperoleh akar-akar karakteristik $\alpha_1 = -3$ dan $\alpha_2 = 2$.

Karena akar-akar karakteristiknya berbeda, maka penyelesaian homogennya berbentuk

$b_n^{(h)} = A_1\alpha_1^{\,n} + A_2\alpha_2^{\,n} \quad \Rightarrow \quad b_n^{(h)} = A_1(-3)^n + A_2\,.\,2^n.$

Dengan kondisi batas $b_0 = 0$ dan $b_1 = 1$, maka

$b_0^{(h)} = A_1(-3)^0 + A_2 2^0 \quad \Rightarrow \ 0 = A_1 + A_2.$

$b_1^{(h)} = A_1(-3)^1 + A_2 2^1 \quad \Rightarrow \ 1 = -3\ A_1 + 2A_2.$

bila diselesaikan maka akan diperoleh nilai A_1 = (-1/5) dan A_2 = 1/5 , sehingga jawab homogen dari relasi rekurensi $b_n + b_{n-1} - 6b_{n-2} = 0$ adalah

$b_n^{(h)} = -\frac{1}{5}(-3)^n + \frac{1}{5}2^n.$

Jika akar karakteristik α_1 dari persamaan karakteristik merupakan akar ganda yang berulang sebanyak *m* kali, maka bentuk penyelesaian homogen yang sesuai untuk akar ganda tersebut adalah

$$\left(A_1 n^{m-1} + A_2 n^{m-2} + \ \ldots\ + A_{m-2} n^2 + A_{m-1} m + A_m\right) a_1^{\,n} \qquad (6.94)$$

dimana A_i adalah konstanta yang akan ditentukan untuk memenuhi syarat batas.

Contoh 6.20. Tentukan, apakah barisan $\{a_n\}$ adalah penyelesaian dari relasi rekurensi yang dirumuskan dengan $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ untuk $n = 2, 3, 4, \cdots$ dimana $a_n = 3n$ untuk setiap bilangan bulat non-negatif *n*. Tentukan juga, apakah $\{a_n\}$ adalah penyelesaian relasi rekurensi dan *n* tersebut di atas jika $a_n = 2^n$ dan jika $a_n = 5$.

Jawab. Misalkan $a_n = 3n$ untuk setiap bilangan bulat non-negatif *n*. Maka untuk $n \geq 2$, dapat ditunjukkan bahwa $2a_{n-1} - a_{n-2} = 2[3(n-1)] - 2(n-2) = 3n = a_n$. Oleh sebab itu barisan $\{a_n\}$ adalah penyelesaian dari relasi rekurensi $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ dengan $a_n = 3n$. Selanjutnya andaikan bahwa $a_n = 2^n$ untuk setiap bilangan non-negatif *n*. Perhatikan bahwa $a_0 = 1, a_1 = 2, \text{dan } a_2 = 4$. Karena $2a_1 - a_0 = 2.2 - 1 \ = 3 \neq a_2$, maka diketahui bahwa barisan $\{a_n\}$ dengan $a_n = 2^n$ bukanlah penyelesaian dari relasi rekurensi tersebut di atas.

Selanjutnya misalkan $a_n = 5$ untuk setiap bilangan bulat non-negatif *n*. Maka untuk $n \geq 2$, dapat ditunjukkan bahwa $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} = 2.5 - 5 = 5 = a_n$.

dengan demikian $\{a_n\}$ dengan $a_n = 5$ merupakan suatu penyelesaian dari relasi rekurensi tersebut di atas.

Contoh 6.21. Tentukan penyelesaian dari relasi rekurensi $a_n + 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 2^n$

Jawab. Relasi rekurensi homogen $a_n + 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0$

Persamaan karakteristiknya adalah $a^2 + 4a + 4 = \ 0$ atau $(a+2)\ (a+2) = 0$

hingga diperoleh akar-akar karakteristik $\alpha_1 = \alpha_2 = -2, \ \ m = 2$.

Akar-akar karakteristiknya sama maka penyelesaian homogennya berbentuk

$$a_n^{(h)} = \left(A_1 n^{m-1} + A_2 n^{m-2}\right)\alpha_1^{\ n}, \quad a_n^{(h)} = \left(A_1 n + A_2\right)\left(-2\right)^n.$$

Contoh 6.22. Tentukanlah penyelesaian homogen dari relasi rekurensi $4a_n - 20a_{n-1} + 17a_{n-2} - 4a_{n-3} = 0$

Jawab: Persamaan karakteristiknya adalah $4\alpha^3 - 20\alpha^2 + 17\alpha - 4 = 0$ dan akar-akar karakteristiknya adalah ½ , ½ dan 4. Dengan demikian penyelesaian homogen dari relasi rekurensi di atas adalah $a_n^{(h)} = (A_1 n + A_2)(½)^n + A_3 4^n$

Tidak terdapat prosedur atau metode yang khusus untuk menentukan penyelesaian khusus dari suatu relasi rekurensi linier non-homogen. Tetapi penyelesaian khusus untuk relasi rekurensi linier dengan $f(n) \neq 0$, dapat ditentukan dengan menggunakan model yang disesuaikan dengan $f(n)$. Model yang umum digunakan adalah model polinomial atau model eksponensial.

1. Jika $f(n)$ berbentuk polinomial berderajat *t* dalam *n*:

$$F_1 n^t + F_2 n^{t-1} + \ldots + F_t n + F_{t+1}, \tag{6.95}$$

   maka bentuk dari penyelesaian khusus yang sesuai adalah :

$$P_1 n^t + P_2 n^{t-1} + \ldots + P_t n + P_{t+1} \tag{6.96}$$

2. Jika $f(n)$ berbentuk β^n dan β bukan akar karakteristik dari persamaan homogen, maka jawab khusus berbentuk Pb^n
3. Jika $f(n)$ berbentuk $\left(F_1.n^t + F_2.n^{t-1} + \ldots + F_t.n + F_{t+1}\right)b^n$ dan β <u>bukan</u> akar karakteristik dari persamaan homogen, maka penyelesaian khusus yang sesuai adalah:

$$\left(P_1 n^t + P_2 n^{t-1} + \ldots + P_t n + P_{t+1}\right)b^n \tag{6.97}$$

4. Jika $f(n)$ berbentuk dan β akar karakteristiknya berulang sebanyak $(m-1)$ kali, maka bentuk penyelesaian khusus yang sesuai adalah :

$$n^{m-1}.\left(P_1 n^t + P_2 n^{t-1} + \ldots + P_t n + P_{t+1}\right)b^n \tag{6.98}$$

Contoh 6.23. Jika $a_r - 7a_{r-1} + 10a_{r-2} = 3^r$, tentukanlah penyelesaian khusus dari a_r.

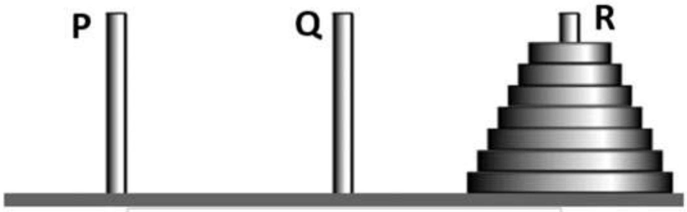
Jawab. Diketahui $f(r)=3^r$. Bentuk $f(r)$ tersebut adalah b^r dengan b = 3 bukan akar karakteristik, maka penyelesaian khusus dari relasi rekurensi tersebut berbentuk $P3^r$. Jadi $a_r = P3^r$.

Contoh 6.24. Menara Brahma (Tower of Hanoi)

Menurut legenda India, pada awal penciptaan, dewa menyusun 64 cakram emas pada salah satu dari tiga tiang emas yang berada di kuil Brahma di Benares (sekarang bernama Varanasi). Rahib yang bertugas diperintahkan untuk memindahkan cakram-cakram tersebut dari tiang P ke tiang R melalui tiang Q sebagai bantuan, dengan syarat sebagai berikut:

- Dalam satu kesempatan, rahib hanya boleh mengangkat satu cakram dari satu tiang ke tiang lainnya.
- Pada saat memindahkan, cakram yang lebih kecil harus diletakkan di atas cakram yang lebih besar.

Jika semua cakram telah dipindahkan ke tiang lainnya, maka dunia akan kiamat.



Gambar 6.1. Menara Hanoi

Misalkan pada tiang P terdapat n cakram dan b_n adalah banyaknya langkah yang diperlukan untuk memindahkan semua cakram dari tiang P ke tiang R melalui tiang Q sebagai perantara. Tentukanlah b_n secara rekursif.

Penyelesaian

Jika tiang P hanya terdiri dari 1 cakram, maka banyaknya langkah yang diperlukan untuk memindahkan cincin tersebut adalah 1, dengan kata lain $b_1 = 1$. Selanjutnya asumsikan bahwa $n \geq 2$. Perhatikan ke-$(n-1)$ cakram paling atas pada tiang P. Menurut definisi, diperlukan b_{n-1} langkah untuk memindahkan semua cakram tersebut dari P ke R. Dengan menyelesaikan b_{n-1} langkah maka cakram terbesar yang terletak paling bawah pada tiang

P belum berpindah dari tempatnya; diperlukan 1 langkah untuk memindahkan cakran tersebut ke tiang R. Sekarang, ke-$(n-1)$ cakram di Q dapat dipindahkan dengan $(n-1)$ langkah ke R melalui tiang P. Dengan demikian total langkah untuk memindahkan semua cakram dari P ke R melalui Q adalah $b_{n-1}+1+b_{n-1}=2b_{n-1}+1$. Karena itu b_n dapat ditentukan secara rekursif sebagai berikut:

$$b_n=\begin{cases}1 & \text{jika n=1}(\text{syarat awal})\\ 2b_{n-1}+1 & \text{lainnya}(\text{relasi rekurensi})\end{cases}$$

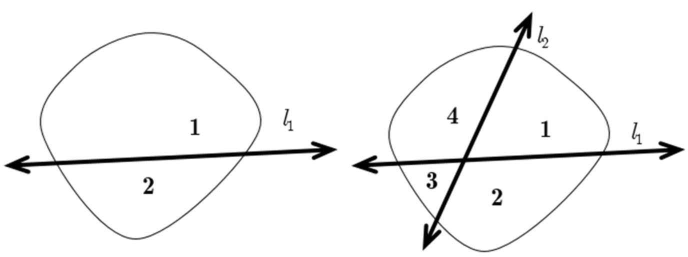
Sebagai contoh,

$$\begin{aligned} b_4 &= 2b_3+1 & &= 2[2b_2+1]+1 \\ &= 4b_2+2+1 & &= 4[2b_1+1]+2+1 \\ &= 8b_1+4+2+1 & &= 8(1)+4+2+1 \\ &= 15 \end{aligned}$$

Jadi diperlukan 15 langkah untuk memindahkan 4 cakram dari tiang P ke tiang R.

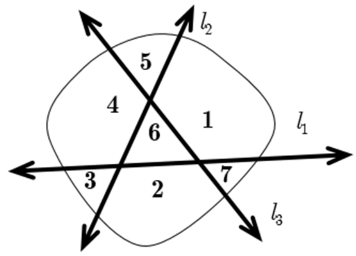
Contoh 6.25. Bayangkan *n* garis terletak pada satu bidang datar sedemikian sehingga tidak terdapat dua garis yang sejajar, dan tidak ada tiga garis yang berpotongan pada satu titik. Misalkan f_n menyatakan banyaknya daerah berbeda pada bidang datar tadi. Definisikanlah f_n secara rekursif.

Penyelesaian. Jika hanya ada satu garis pada bidang datar tersebut, maka $f_1=2.$ Misalkan ada garis l_2 pada bidang yang sama, maka garis l_2 berpotongan dengan garis l_1 tepat pada satu titik.



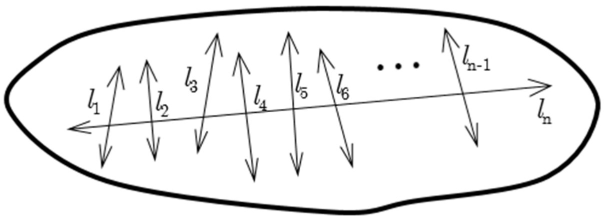
Gambar 6.2. Garis l_1 dan l_2 membagi daerah menjadi dua bagian

Kedua potongan garis l_2 membagi daerah bidang datar menjadi dua bagian, sehingga daerah bidang datar sekarang menjadi empat. Jadi, $f_2 = f_1 + 2 = 4$. Jika ditambahkan lagi garis l_3 maka garis ini terbagi menjadi tiga bagian karena berpotongan dengan garis l_1 dan l_2 masing-masing pada satu titik yang berbeda. Setiap bagian garis membagi daerah yang telah ada menjadi dua bagian, sehingga bertambah tiga daerah. Jadi $f_3 = f_2 + 3 = 7$.



Gambar 6.3. Tiga garis membagi daerah menjadi tujuh bagian

Secara umum, jika ada $n-1$ garis yaitu $l_1, l_2, \cdots, l_{n-1}$ pada bidang yang sama, maka bidang akan dibagi menjadi f_{n-1} daerah yang terpisah. Jika ditambahkan lagi garis ke-*n,* dan karena tidak ada tiga garis yang saling berpotongan pada titik yang sama, maka garis l_n haruslah memotong garis-garis $l_1, l_2, \cdots, l_{n-1}$ pada suatu titik lainnya, dan karena itu l_n terbagi menjadi *n* segmen. Setiap segmen garis membagi daerah yang telah ada menjadi dua sub bagian, dengan menambah *n* daerah baru, jadi $f_n = f_{n-1} + n$.



Gambar 6.4. Definisi rekursif *n* garis membagi daerah menjadi $f_{n-1} + n$ bagian

Dengan demikian f_n dapat didefinisikan secara rekursif sebagai berikut:

$$f_n = \begin{cases} 1 & \text{jika } n = 0 \\ f_{n-1} + n & \text{jika } n \neq 0 \end{cases}$$

Contoh 6.26. Tentukanlah banyaknya jabat tangan yang terjadi jika suatu pesta dihadiri oleh *n* tamu dinyatakan dengan

$$h(1) = 0$$

dan

$$h(n) = h(n-1) + (n-1), n \geq 2$$

Selesaikan masalah tersebut dengan relasi rekurensi.

Jawab.

Langkah 1. Mencoba merumuskan $h(n)$:

Dengan menggunakan iterasi,

$$\begin{aligned} h(n) \quad &= h(n-1) + (n-1) \\ &= h(n-2) + (n-2) + (n-1) \\ &= h(n-3) + (n-3) + (n-2) + (n-1) \\ &\vdots \\ &= h(1) + 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) \\ &= 0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) \\ &= \frac{n(n-1)}{2}. \end{aligned}$$

Langkah 2. Membuktikan dengan induksi matematika bahwa

$$h(n) = \frac{n(n-1)}{2}, \; n \geq 1:$$

Langkah basis: untuk *n* = 1, $h(1) = \dfrac{1(1-1)}{2} = 0$

sesuai dengan syarat awal. Jadi rumus berlaku untuk *n* = 1.

Langkah induksi: asumsikan bahwa $h(k) = \dfrac{k(k-1)}{2}, \; k \geq 1.$

Maka berdasarkan prinsip relasi rekurensi, $h(k+1) = h(k) + k,$

dan berasarkan hipotesis induksi,

$$h(k+1) = \frac{k(k-1)}{2} + k = \frac{k(k-1) + 2k}{2} = \frac{k(k+1)}{2}$$

Karena itu, jika rumus berlaku untuk $n = k,$ maka berlaku juga untuk $n = k+1.$

Jadi berdasarkan prinsip induksi matematika, rumus tersebut di atas berlaku untuk semua $n \geq 1$.

Secara umum, dengan menggunakan iterasi, relasi rekurensi

$a_n = a_{n-1} + f(n)$

dapat diselesaikan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_{n-1} + f(n) \\
&= [a_{n-2} + f(n-1)] + f(n) = a_{n-2} + f(n-1) + f(n) \\
&= [a_{n-3} + f(n-2)] + f(n-1) + f(n) \\
\\
&= a_{n-3} + f(n-2) + f(n-1) + f(n) \\
&\vdots \\
&= a_0 + \sum_{i=1}^{n} f(i)
\end{aligned}
$$

Mahasiswa diharapkan dapat menyelidiki bahwa bentuk tersebut di atas merupakan penyelesaian yang sebenarnya dari masalah relasi rekurensi. Misalnya di dalam Contoh 6.26, jumlah jabat tangan yang terjadi di antara *n* orang, diketahui bahwa $f(n) = n-1$ dan $h(0) = 0$, sehingga penyelesaian dari relasi rekurensi tersebut adalah

$$
\begin{aligned}
h(n) &= h(0) + \sum_{i=1}^{n} f(i) = 0 + \sum_{i=1}^{n} f(i-1) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}, \quad n \geq 1
\end{aligned}
$$

Contoh 6.27. Perhatikan dari Contoh 6.24 bahwa banyaknya langkah yang dilakukan untuk memindahkan *n* cakram dari tiang P ke R dapat dinyatakan dengan:

$b_1 = 1$

$b_n = 2b_{n-1} + 1, n \geq 2$

Selesaikanlah relasi rekurensi tersebut.

Jawab:

Langkah 1: Merumuskan bentuk b_n :

Dengan menggunakan iterasi,

$$
\begin{aligned}
b_n &= 2b_{n-1}+1 \\
&= 2[2b_{n-2}+1]+1 = 2^2 b_{n-2}+2+1 \\
&= 2^2[2b_{n-3}+1]+2+1 = 2^3 b_{n-3}+2^2+2+1 \\
&\vdots \\
&= 2^{n-1}b_1+2^{n-2}+\cdots+2^2+2+1 \\
&= 2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2+1 \\
&= 2^n-1.
\end{aligned}
$$

Langkah 2: dengan induksi matematika mahasiswa dapat membuktikan bahwa $b_n = 2^n - 1$, dimana $n \geq 1$.

Dalam bentuk yang lebih umum, mahasiswa juga dapat menyelidiki bahwa penyelesaian dari masalah relasi rekurensi yang berbentuk $a_n = ca_{n-1} + 1$ dengan $c \neq 1$ adalah suatu bilangan konstan, adalah $a_n = c^n a_0 + \dfrac{c^n - 1}{c-1}$.

Dalam Contoh 6.24, jika $b_0 = 0$ dan $c = 2$, maka diperoleh

$$b_n = 2^n.0 + \frac{2^n - 1}{2-1} = 2^n - 1.$$

Lebih lanjut mengenai mengenai Contoh 6.24 dan 6.27, misalkan ada 64 cakram yang akan dipindahkan dari tiang P ke tiang R dan setiap pemindahan memerlukan waktu 1 detik, maka untuk menyelesaikan tugas memindahkan semua cakram dari tiang P ke tiang R maka akan diperlukan waktu selama $2^{64} - 1$ detik ≈ 600 milyar tahun. Sebagai perbandingan, umur alam semesta sampai sekarang sudah 18 milyar tahun.

D. Relasi Rekurensi Linier Berkoefisien Konstan

Secara umum, relasi rekurensi linier berkoefisien konstan dari suatu fungsi a, dinyatakan sebagai berikut

$$C_0 a_n + C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \ldots + C_k a_{n-k} = f(n) \qquad (6.99)$$

dimana C_i untuk i = 0,1,2,…,k adalah konstan dan $f(n)$ adalah fungsi dengan variabel n. Relasi rekurensi tersebut dinamakan relasi rekurensi linier berderajat k, jika C_0 dan C_k keduanya tidak bernilai 0 (nol).

Contoh 6.28. Bentuk dan derajat relasi rekurensi

$2a_n + 2a_{n-1} = 3^n$ relasi rekurensi linier berderajat 1

$t_n = 7t_{n-1}$ relasi rekurensi linier berderajat 1

$a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0$ relasi rekurensi linier berderajat 2

$b_{n-3} - 3b_n = n + 3$ relasi rekurensi linier berderajat 3

Untuk relasi rekurensi dengan koefisien konstan derajat *k*, jika diberikan *k* nilai a_j yang berurutan $a_{m-k}, a_{m-k+1}, \dots, a_{m-1}$ pada suatu nilai *m* tertentu, maka setiap nilai a_m yang lainnya dapat ditentukan sebagai berikut:

$$a_m = \left(C_1 a_{m-1} + C_2 a_{m-2} + \dots + C_k a_{m-k} - f(m)\right) \tag{6.100}$$

Nilai a_{m+1} juga dapat ditentukan dengan cara yang sama,

$$a_{m+1} = \left(C_1 a_m + C_2 a_{m-1} + \dots + C_k a_{m-k+1} - f(m+1)\right) \tag{6.101}$$

demikian pula untuk nilai a_{m+2}, a_{m+3} dan seterusnya. Di lain pihak, nilai a_{m-k-1} dapat pula ditentukan dengan

$$a_{m-k-1} = \left(C_1 a_{m-1} + C_2 a_{m-2} + \dots + C_{k-1} a_{m-k} - f(m-1)\right) \tag{6.102}$$

dan a_{m-k-2} dapat dicari dengan

$$a_{m-k-2} = \left(C_1 a_{m-2} + C_2 a_{m-3} + \dots + C_{k-1} a_{m-k-1} - f(m-2)\right). \tag{6.103}$$

Nilai a_{m-k-3} dan seterusnya dapat ditentukan dengan cara yang sama. Jadi, untuk suatu relasi rekurensi linier berkoefisien konstan derajat *k*, jika terdapat nilai *k* banyaknya a_j yang berurutan diketahui, maka nilai a_j yang lainnya dapat ditentukan secara unik. Dengan kata lain, *k* buah nilai a_j yang diberikan merupakan himpunan syarat batas yang harus dipenuhi oleh untuk dapat memperoleh nilai yang unik.

D.1. Relasi Rekurensi Homogen Linier Berkoefisien Konstan

Suatu relasi rekurensi homogen linier yang berkoefisien konstan adalah relasi rekurensi yang berbentuk

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} \tag{6.104}$$

dengan $c_1, c_2, \cdots, c_k \in \mathbb{R}$ dan $c_k \neq 0$.

Istilah *linier* berarti bahwa setiap suku ruas kanan dari persamaan (6.21) paling tinggi mengandung a_i berpangkat satu. Suatu relasi rekurensi dikatakan *homogen* jika setiap sukur pada ruas kanan dari persamaan (6.21) merupakan kelipatan dari a_i tertentu, dengan kata lain relasi rekurensi tersebut terpenuhi oleh barisan $\{0\}$; yaitu bahwa $a_n = 0$ untuk setiap *n*. semua koefisien c_i adalah konstan. Karena a_n bergantung pada *k* suku yang ada di ruas kanan, maka *orde* dari relasi rekurensi tersebut adalah *k*. Dengan sendirinya, untuk menyelesaikan suatu relasi rekurensi homogen linier berkoefiein konstan orde *k* diperlukan *k* syarat awal, misalnya $a_0 = C_0, a_1 = C_1, \cdots, a_{k-1} = C_{k-1}$. Beberapa bentuk dasar dari relasi rekurensi adalah sebagai berikut:

- Relasi rekurensi $s_n = 2s_{n-1}$ merupakan suatu relasi rekurensi homogen linier berkoefisien konstan, berorde satu.
- Relasi rekurensi $a_n = na_{n-1}$ adalah linier dan homogen. Tetapi koefisien di sebelah kanan bukan bilangan konstan. Karena itu $a_n = na_{n-1}$ bukan relasi rekurensi linier homogen berkoefisien konstan.
- Relasi rekurensi $h_n = h_{n-1} + (n-1)$ adalah relasi rekurensi linier, tetapi tidak homogen karena adanya $(n-1)$.
- Relasi rekurensi $a_n = a_{n-1}^2 + 3a_{n-2}$ adalah homogen tetapi tidak homogen karena pangkat dari a_{n-1} adalah 2.
- Relasi rekurensi $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 3a_{n-6}$ adalah relasi rekurensi homogen linier berkoefisien konstan berorde 6.

Perhatikan bahwa penyelesaian dari relasi rekurensi $s_n = 2s_{n-1}$ dimana $s_0 = 1$, adalah $s_n = 2^n$, $n \geq 0$. Mahasiswa dapat memeriksa bahwa secara umum, penyelesaian dari relasi rekurensi $a_n = \alpha a_{n-1}$ dimana $a_0 = c$, adalah $a_n = c\alpha^n$, $n \geq 0$. Sekarang kita kembali kepada relasi rekurensi homogen linier berkoefisien konstan orde kedua,

$$a_n = aa_{n-1} + ba_{n-2} \tag{6.105}$$

dimana *a* dan *b* adalah konstanta-konstanta yang bukan nol. Jika persmaan (6.22) memiliki penyelesaian tak-nol yang berbentuk $c\alpha^n$, maka $c\alpha^n = ac\alpha^{n-1} + bc\alpha^{n-2}$. Karena $c\alpha \neq 0$

maka $\alpha^2 = a\alpha + b$; yaitu $\alpha^2 - a\alpha - b = 0$, dan α dipastikan merupakan salah satu penyelesaian dari **persamaan karakteristik**

$$x^2 - ax - b = 0 \tag{6.106}$$

dari relasi rekurensi (6.22). Akar-akar persamaan (6.23) adalah akra-akar karakteristik dari relasi rekurensi (6.22). Teorema 6.3. – 6.4 memperlihatkan bagaimana akar-akar karakteristik membantu dalam menyelesaikan masalah relasi rekurensi homogen linier berkoefisien konstan.

Teorema 6.3. Misalkan α dan β adalah penyelesaian yang berbeda (real maupun kompleks) dari persamaan $x^2 - ax - b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ dan $b \neq 0$. Maka setiap penyelesaian dari relasi rekurensi homogen linier yang berkoefisien konstan $a_n = aa_{n-1} + ba_{n-2}$ dimana $a_0 = C_0$ dan $a_1 = C_1$ adalah $a_n = A\alpha^n + B\beta^n$ untuk *A* dan *B* tertentu.

Bukti: Pembuktian teorema ini terdiri atas dua bagian:

- Pertama akan ditunjukkan bahwa $a_n = A\alpha^n + B\beta^n$ merupakan penyelesaian dari relasi rekurensi untuk sebarang kontanta *A* dan *B*.
- Selanjutnya akan ditentukan nilai *A* dan *B* yang memenuhi syarat awal yang telah diberikan.
- Pertama-tama, perhatikan bahwa karena α dan β adalah penyelesaian-penyelesaian dari persamaan (5.9), $\alpha^2 = a\alpha + b$ dan $\beta^2 = a\beta + b$.
- Untuk menunjukkan bahwa $a_n = A\alpha^n + B\beta^n$ adalah penyelesaian dari relasi rekurensi,

  $$\begin{aligned} aa_{n-1} + ba_{n-2} &= a\left(A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1}\right) + b\left(A\alpha^{n-2} + B\beta^{n-2}\right) \\ &= A\alpha^{n-2}(a\alpha + b) + B\beta^{n-2}(a\beta + b) \\ &= A\alpha^{n-2}.\alpha^2 + B\beta^{n-2}\beta^2 \\ &= A\alpha^n + B\beta^n \\ &= a_n. \end{aligned}$$

  Jadi $a_n = A\alpha^n + B\beta^n$ adalah penyelesaian dari relasi rekurensi (6.22).
- Kedua, misalkan $a_n = A\alpha^n + B\beta^n$ adalah penyelesaian dari relasi rekurensi (6.22). Untuk menentukan nilai *A* dan *B* perhatikan bahwa syarat-syarat $a_0 = C_0$ dan $a_1 = C_1$ menghasilkan sistem linier seperti di bawah ini:

$C_0 = A + B$
$C_1 = A\alpha + B\beta$

Dari kedua persamaan tersebut, diperoleh:

$$A = \frac{C_1 - C_0\beta}{\alpha - \beta} \text{ dan } B = \frac{C_0\alpha - C_1}{\alpha - \beta} \qquad (\alpha \neq \beta)$$

dengan nilai *A* dan *B* ini, a_n memenuhi syarat awal dan relasi rekurensi. Karena relasi rekurensi dan syarat awal menyarakan suatu barisan unik, $\{a_n\}$, maka $a_n = A\alpha^n + B\beta^n$ adalah penyelesaian dari relasi rekurensi tersebut.

Beberapa hal penting untuk diperhatikan:

- Penyelesaian untuk α dan β tidak nol, karena jika $\alpha = 0$ maka $\beta = 0$ juga.
- Teorema 6.3 tidak berlaku jika $\alpha = \beta$. Meskipun demikian, teorema tersebut tetap berlaku untuk semua nilai yang lainnya, termasuk untuk bilangan kompleks.
- Penyelesaian α^n dan β^n adalah penyelesaian dasar dari relasi rekurensi. Secara umum, banyaknya penyelesaian dasar sama dengan orde dari relasi rekurensi yang bersangkutan.

Penyelesaian umum $a_n = A\alpha^n + B\beta^n$ merupakan **kombinasi linier** dari penyelesaian-penyelesaian dasar. Penyelesaian khusus diperoleh dengan memilih A dan B sedemikian sehingga syarat awal terpenuhi. Tiga contoh berikut ini menggambarkan cara menyelesaikan relasi rekurensi homogen linier berkoefisien konstan dengan menggunakan persamaan karakteristiknya.

Contoh 6.29. Selesaikanlah relasi rekurensi $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$, dimana $a_0 = 4$ dan $a_1 = 7$.

Jawab:

- Untuk mencari penyelesaian umum dari relasi rekurensi:

Persamaan karakeristik dari relasi rekurensi tersebut adalah $x^2 - 5x + 6 = 0$; akar-akar karakteristiknya adalah 2 dan 3. Oleh karena itu, menurut Teorema 6.3, penyelesaian umum dari relasi rekurensi adalah $a_n = A.2^n + B.3^n$.

- Untuk mencari nilai A dan B. Dengan menggunakan syarat awal,

$$a_0 = A + B = 4$$
$$a_1 = 2A + 3B = 7$$

diperoleh A = 5 dan B = -1.

Jadi penyelesaian dari relasi rekurensi yang memenuhi syarat yang diberikan di atas adalah $a_n = 5.2^n - 3^n, n \geq 0$. Contoh 6.30. secara eksplisit memperlihatkan cara mencari rumus untuk bilangan Fibonacci ke-n.

Contoh 6.30. Selesaikanlah relasi rekurensi Fibonacci yang dinyatakan dalam bentuk $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, dengan $F_1 = 1 = F_2$.

Jawab. Persamaan karakteristik dari relasi rekurensi tersebut adalah $x^2 - x - 1 = 0$, dan penyelesaiannya adalah $\alpha = (1+\sqrt{5})/2$ dan $\beta = (1-\sqrt{5})/2$. Dengan kedua nilai tersebut dapat dibuktikan bahwa $\alpha + \beta = 1$ dan $\alpha\beta = -1$ Sehingga penyelesaian umumnya adalah

$$F_n = A\alpha^n + B\beta^n.$$

Untuk menentukan *A* dan *B,* maka digunakan bentuk umum, penyelesaian umum dan fakta bahwa $F_1 = 1 = F_2$.

$$F_1 = A\alpha + B\beta = 1$$
$$F_2 = A\alpha^2 + B\beta^2 = 1$$

Dengan menyelesaikan kedua persamaan ini, diperoleh:

$$A = \frac{\alpha}{1+\alpha^2} = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)/2}{\left(5+\sqrt{5}\right)/2} = \frac{1+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)}{\left(5+\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)} = \frac{5+5\sqrt{5}-\sqrt{5}-5}{25-5}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Dengan cara yang sama, diperoleh $B = \frac{\beta}{1+\beta^2} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Jadi penyelesaian dari relasi rekurensi yang memenuhi syarat yang diberikan adalah

$$a_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

yang merupakan bentuk *Binet* dari bilangan Fibonacci ke-*n*.

Contoh 6.31. Ada berapa cara menyatakan bilangan bulat non-negatif *n* sebagai jumlahan dari 1 dan 2 secara berturut-turut?

Jawab: Misalkan bilangan yang dimaksudkan adalah F_n, maka untuk $F_4 = 5$ karena

$$4 = 1+1+1+1 = 2+1+1 = 1+2+1 = 1+1+2 = 2+2.$$

Dengan cara yang sama, diketahui bahwa

$$F_1 = 1, F_2 = 1+1 = 2, \text{dan } F_3 = 1+1+1 = 1+2 = 2+1$$

sehingga

$$F_1 = 1, F_2 = 2, \text{dan } F_3 = 3$$

Untuk kesepakatan, $F_0 = 1$ karena satu-satunya penyelesaian untuk $n = 0$ adalah barisan himpunan kosong.

Andaikan bahwa $n \geq 2$. Sebarang *n* sebagai jumlahan dari angka 1 dan 2 pasti berakhir dengan 1 atau 2. Jika suku-suku yang dijumlahkan berakhir dengan angka 1, maka banyaknya suku-suku yang dijumlahkan ada *n* – 1; jika suku-suku yang dijumlahkan berakhir dengan angka 2, maka banyaknya suku-suku yang dijumlahkan ada *n* – 2. Jadi secara umum $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Bilangan-bilangan $F_0, F_1, F_2, \cdots$ disebut bilangan Fibonacci.

Barisan bilangan Fibonacci merupakan salah satu contoh relasi rekurensi linier 3 suku dengan koefisien konstan. Secara umum suatu relasi rekurensi $(k+1)$ suku menyatakan bahwa sebarang nilai $F(n)$ suatu fungsi ditentukan oleh *k* nilai yang mendahuluinya di dalam barisan yang sama. Dengan kata lain setiap elemen di dalam barisan Fibonacci $F(n-1), F(n-2), \cdots, F(n-k)$ dikatakan linier jika bentuknya

$$F(n) = a_1(n)F(n-1) + a_2(n)F(n-2) + \cdots + a_k(n)F(n-k),$$

dengan $a_1, a_2, \cdots a_k$ adalah fungsi *n* yang berbentuk linier berkoefisien konstan jika $a_1, a_2, \cdots a_k$ adalah konstan.

Fakta: suatu fungsi yang memenuhi relasi rekurensi $(k+1)$ suku, secara unik ditentukan oleh nilai-nilainya pada *k* bilangan asli pertama. Dalam hal ini *k* bilangan asli pertama dapat memiliki nilai $0, 1, \cdots, k-1$ atau $1, 2, \cdots, k$ tergantung pada konteksnya.

Jika diketahui $F(1), F(2), \cdots, F(k)$ maka nilai-nilai ini menentukan $F(k+1)$ dan kemudian nilai-nilai $F(2), F(3) \cdots F(k+1)$ menentukan nilai $F(k+2)$ dan seterusnya. Secara formalnya, jika dua fungsi *F* dan *G* memenuhi relasi rekurensi yang sama dan nilai-nilainya sesuai bersesuaian pada *k* bilangan asli pertama, maka dapat dibuktikan dengan induksi bahwa kedua fungsi tersebut bersesuaian untuk semua bilangan asli.

Masalah bilangan Fibonacci dapat diselesaikan dengan dua cara. Cara pertama adalah dengan menggunakan relasi rekurensi dan cara kedua adalah dengan menggunakan fungsi pembangkit.

Cara I: Untuk $n \geq 2,$ relasi rekurensi Fibonacci dirumuskan sebagai berikut:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Karena relasi rekurensi tersebut adalah linier, jika dapat ditemukan penyelesaiannya, maka dapat dibentuk suatu kombinasi linier untuk menyusun penyelesaian yang baru. Misalkan *F* dan *G* memenuhi relasi rekurensi tersebut di atas dan misalkan $H_n = aF_n + bG_n$ maka

$$\begin{aligned} H_n &= aF_n + bG_n \\ &= a(F_{n-1} + F_{n-2}) + b(G_{n-1} + G_{n-2}) \\ &= (aF_{n-1} + bG_{n-1}) + (aF_{n-2} + bG_{n-2}) \\ &= H_{n-1} + H_{n-2}. \end{aligned}$$

Dengan memilih nilai-nilai a dan b, maka nilai awal dapat dipenuhi. Misalkan dicoba suatu penyelesaian yang berbentuk $F_n = \alpha^n.$ Untuk itu, diperlukan

$$\begin{aligned} \alpha^n &= \alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}, \\ \alpha^{n-2}(\alpha^2 - \alpha - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Jadi jika $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0,$ maka relasi rekurensi tersebut berlaku untuk semua *n*. Akar-akar persamaan ini adalah $\alpha = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}),\ \beta = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}).$ Dengan demikian diperoleh bentuk penyelesaian umum

$$F_n = a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Untuk memenuhi syarat awal $F_0 = F_1 = 1$ yang diberikan, maka haruslah $a + b = 1$,

$$a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1.$$

Karena $a + b = 1,\ a - b = \frac{1}{\sqrt{5}}$, diperoleh

$$a = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\right), \quad b = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\right).$$

Dengan demikian, bilangan Fibonacci dirumuskan

$$F_n = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Perhatikan bahwa

1. $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \approx 1{,}618...$, dan $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \approx -0{,}618...$ jadi fungsi tersebut bertambah secara eksponensial. Untuk nilai *n* yang besar, nilainya merupakan bilangan bulat terdekat dengan $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$
2. Nilai *a* dan *b* dapat ditentukan dengan mudah sedemikian sehingga nilainya memenuhi nilai awal yang ditentukan.
3. Untuk tujuan tertentu, rumusan eksplisit kurang bermanfaat dibandingkan dengan relasi rekurensi.

Cara II: Penyelesaian relasi rekurensi dapat dilakukan dengan teknik fungsi pembangkit. Misalkan $\phi(t)$ adalah deret pangkat

$$\phi(t) = \sum_{n\geq 0} F(n)t^n,$$

dimana *t* adalah suatu bilangan tak hingga sehingga,

$$t\phi(t) = \sum_{n\geq 0} F(n)t^{n+1} = \sum_{n\geq 1} F(n-1)t^n$$

$$t^2\phi(t) = \sum_{n\geq 0} F(n)t^{n+2} = \sum_{n\geq 2} F(n-2)t^n$$

Pada masing-masing persamaan di atas, digunakan fakta bahwa *n* hanya merupakan "variabel dummy" yang dapat dinyatakan dengan sebarang variabel. Misalnya untuk persamaan pertama, disubtitusikan $m = n + 1,$ kemudian mengganti variabel dummy *m* menjadi *n*. Jika penjelasan ini sukar dipahami, mahasiswa dapat mencoba menuliskan beberapa suku pertama dari bentuk kedua dan ketiga.

Sekarang perhatikan bahwa $F_n = F_{n-1} + F_{n-2},$ sehingga hampir dapat dipastikan bahwa $\phi(t) = (t + t^2)\phi(t).$ Tentu saja koefisien-koefisien dari t^2 dan semua pangkat yang lebih tinggi akan bernilai sama pada kedua sisi dari persamaan ini. Tetapi faktor-faktor konstant harus disesuaikan dengan faktor-faktor yang mengandung *t* dengan tetap mengingat bahwa $F_0 = F_1 = 1.$ Koefisien dari *t* adalah F_1 pada ruas kiri, dan F_0 pada ruas kanan sehingga pernyataan di atas adalah pernyataan yang benar. Faktor konstan ruas kiri adalah F_0 dan 0 untuk ruas kanan. Karena itu ruas kanan harus ditambahkan 1 agar ruas kiri sama dengan ruas kanan. Jadi,

$\phi(t) = 1 + (t + t^2)\phi(t),$

yang berarti

$$\phi(t) = \frac{1}{1 - t - t^2} \qquad (6.107)$$

Selanjutnya, nilai F_n adalah koefisien dari t^n di dalam deret Taylor untuk fungsi ini. Pada umumnya nilai F_n dapat diketahui dengan cara ekspansi pecahan parsial. Misalkan $1 - t - t^2 = (1 - \alpha t)(1 - \beta t).$ Maka α dan β adalah akar-akar dari persamaan kuadrat $x^2 - x - 1 = 0,$ dan dapat ditunjukkan bahwa

$\alpha = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right), \beta = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right).$

Jika dimisalkan

$\frac{1}{(1 - \alpha t)(1 - \beta t)} = \frac{a}{1 - \alpha t} + \frac{b}{1 - \beta t},$

maka

$1 = a(1 - \beta t) + b(1 - \alpha t),$

sehingga $a + b = 1, a\beta + b\alpha = 0.$ Persamaan ini dapat diselesaikan untuk *a* dan *b*. Dari bentuk

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \frac{a}{1-\alpha t}+\frac{b}{1-\beta t}\\ &= a(1+\alpha t+\alpha^2t^2+\cdots)+b(1+\beta t+\beta^2t^2+\cdots).\end{aligned}$$

dan dengan menyesauaikan masing-masing koefisien dari t^n di dalam faktor pertama dengan faktor kedua, diperoleh

$$F_n = a\alpha^n + b\beta^n. \tag{6.108}$$

Contoh 6.32. Misalkan a_n menyatakan banyaknya himpunan bagian dari himpunan $S=\{1,2,\cdots,n\}$ yang tidak mengandung bilangan bulat berurutan, dengan $n\geq 0.$ Jika n = 0, maka $S = \varnothing$. Carilah rumusan eksplisit dari a_n.

Jawab. Gambaran tentang nilai a_n untuk $n = 0,1,2,3$ dan 4 akan ditunjukkan pada Tabel 6.1. Terlihat dari tabel tersebut bahwa a_n merupakan suatu bilangan Fibonacci dimana $a_n = F_{n+2}$.

Tabel 6.1. Subset dari S yang tidak mengandung bilangan bulat berturutan

n									a_n
0	ϕ								1
1	ϕ	{1}							2
2	ϕ	{1}	{2}						3
3	ϕ	{1}	{2}	{3}	{1,3}				5
4	ϕ	{1}	{2}	{3}	{4}	{1,3}	{1,4}	{2,4}	8

Dapat dibuktikan dalam dua langkah bahwa $a_n = F_{n+2}$. Langkah pertama adalah mendefinisikan a_n secara rekursif kemudian menyelesaikan relasi rekurensi untuk memperoleh rumusan eksplisit.

- Untuk mendefinisikan a_n secara rekursif:

  Dari Tabel 6.1, diketahui bahwa $a_0 = 1$, dan $a_1 = 2$. dengan demikian dapat dipilih $n \geq 2$. Misalkan A adalah subset dari S yang tidak mengandung dua bilangan bulat berturutan, maka $n \in A$ atau $n \notin A$.

  Kasus 1. Andaikan $n \in A$ maka $n-1 \notin A$. Berdasarkan definisi, $S^* = \{1,2,3,\cdots,n-2\}$ memiliki a_{n-2} subset yang tidak mengandung dua bilangan bulat berturutan.

Tambahkan *n* terhadap masing-masing subset ini. Hasilnya adalah subset dari *S* yang memenuhi sifat yang diinginkan sehingga *S* memiliki a_{n-2} subset seperti itu.

Kasus 2. Misalkan $n \notin A$. Berdasarkan definisi, terdapat a_{n-1} subset *S* yang memiliki sifat yang telah diketahui di atas. Karena kedua kasus ini tidak berhubungan satu dengan yang lainnya, maka menurut prinsip penjumlahan,

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

Jadi a_n dapat dinyatakan secara rekursif sebagai berikut:

$$a_0 = 1, a_1 = 2$$
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \geq 2.$$

- Menyelesaikan relasi rekurensi:

  Relasi rekurensi ini sama persis dengan barisan Fibonacci yang memiliki syarat awal $a_0 = 1, a_1 = 2.$ Jadi selain merumuskan penyelesaian lengkap seperti pada Contoh 6.30, dapat dilihat bahwa definisi ini menghasilkan bilangan-bilangan Fibonacci 1, 2, 3, 5, 8, . . . yang menunjukkan bahwa $a_n = F_{n+2}, n \geq 0.$

  Dengan menggunakan nilai-nilai α dan β dari Contoh 6.30,

$$a_n = F_{n+2} = \frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\alpha - \beta}, n \geq 0.$$

Teorema 6.3. tidak berlaku jika akar-akar karakteristik α dan β memiliki nilai yang sama, yaitu jika α adalah suatu akar karakteristik yang memiliki derajat perkalian dua. Teorema 6.4 dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah dari Teorema 6.3. Menurut Teorema 6.3., selain α^n, $n\alpha^n$ juga merupakan penyelesaian dasar dari relasi rekurensi.

Teorema 6.4. Misalkan $a, b \in \mathbb{R}$ dan $b \neq 0$. Misalkan juga bahwa α dapat merupakan penyelesaian real ataupun penyelesaian kompleks dari persamaan $x^2 - ax - b = 0$ denganderajat perkalian dua. Maka $a_n = A\alpha^n + Bn\alpha^n$ adalah penyelesaian umum dari relasi rekurensi linier homogen yang berkoefisien konstan $a_n = aa_{n-1} + ba_{n-2}$.

Bukti. Karena α adalah akar dari persamaan $x^2 - ax - b = 0$ dengan derajat perkalian dua, maka

$x^2 - ax - b = (x - a)^2 = x^2 - 2ax + \alpha^2$

Karena itu,
$$\begin{aligned} x^2 - ax - b &= (x - a)^2 \\ &= x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 \end{aligned}$$

$$a = 2\alpha \text{ dan } b = -\alpha^2$$

- Untuk menunjukkan bahwa $a_n = n\alpha^n$ memenuhi relasi rekurensi:

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} aa_{n-1} + ba_{n-2} &= a\left[(n-1)\alpha^{n-1}\right] + b\left[(n-2)\alpha^{n-2}\right] \\ &= 2\alpha\left[(n-1)\alpha^{n-1}\right] + \left(-\alpha^2\right)\left[(n-2)\alpha^{n-2}\right] \\ &= \alpha^n\left[2(n-1) - (n-2)\right] \\ &= n\alpha^n = a_n. \end{aligned}$$

Karena itu $n\alpha^n$ merupakan penyelesaian dari relasi rekurensi. Selanjutnya

$$a_n = A\alpha^n + Bn\beta^n$$

adalah penyelesaian umum dari relasi rekurensi dengan A dan B dipilih sedemikian sehingga syarat awal yang diberikan dapat dipenuhi. Contoh berikut ini menjelaskan Teorema 6.4.

Contoh 6.33. Selesaikanlah masalah relasi rekurensi $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$, dengan $a_0 = 2 \text{ dan } a_1 = 3.$

Jawab: Persamaan karakteristik dari relasi rekurensi adalah $x^2 - 6x + 9 = 0.$ Penyelesaian persamaan karakteristiknya adalah 3 dengan derajat keragaman 2. Oleh karena itu berdasarkan Teorema 6.3, penyelesaian umum dari relasi rekurensi adalah

$$a_n = A \cdot 3^n + B \cdot n3^n.$$

Syarat awal $a_0 = 2$ dan $a_1 = 3$ menghasilkan persamaan

$$A.3^0 + B.0.3^0 = 2$$

dan

$$A.3 + B.1.3 = 3$$

Penyelesaian kedua persamaan ini menghasilkan A = 2 dan B = -1. Dengan demikian penyelesaian rekurensi yang memenuhi syarat awal yang diberikan adalah $a_n = 2.3^n - n.3^n, n \geq 0.$

Teorema 6.3. dan 6.4 dapat dipadukan sedemikian rupa sehingga dihasilkan Teorema 6.5 sebagai berikut:

Teorema 6.5. Misalkan α adalah akar karakteristik dari relasi rekurensi homogen linier berkoefisien konstan.

- Jika derajat keragaman dari α adalah 1, maka α^n adalah penyelesaian dasar dari relasi rekurensi homogen linier berkoefisien konstan.
- Jika derajat keragaman dari α adalah *m,* maka $\alpha^n, n\alpha^n, \cdots, n^{m-1}\alpha^n$
- adalah penyelesaian dasar dari relasi rekurensi homogen linier berkoefisien konstan. Relasi rekurensi homogen linier berkoefisien konstan orde *k* memiliki *k* penyelesaian dasar.
- Penyelesaian umum dari relasi rekurensi homogen linier berkoefisien konstan merupakan kombinasi linier dari semua penyelesaian dasarnya.

Contoh 6.34 di bawah ini dapat digunakan untuk membuktikan Teorema 6.5.

Contoh 6.34. Selesaikanlah relasi rekurensi $a_n = 7a_{n-1} - 13a_{n-2} - 3a_{n-3} + 18a_{n-4}$, jika diketahui $a_0 = 5, a_1 = 3, a_2 = 6,$ dan $a_3 = -21.$

Jawab: Persamaan karaktersitik dari relasi rekurensi adalah

$x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 3x - 18 = 0.$

Karena

$x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 3x - 18 = (x+1)(x-2)(x-3)^2,$

maka akar karaktersitiknya adalah -1 dan 2, masing-masing dengan derajat keragaman 1, dan 3 dengan derajat keragaman 2. Karena 3 adalah akar dengan derajat keragaman 2, maka 3 akan memberikan dua penyelesaian dasar yaitu 3^n dan $n3^n$. Jadi penyelesaian umum dari relasi rekurensi homogen linier berkoefisien konstan dalam hal ini adalah kombinasi linier dari penyelesaian-penyelesaian dasar $(-1)^n, 2^n, 3^n,$ dan $n3^n$, yaitu

$$a_n = A(-1)^n + B2^n + C3^n + Dn3^n.$$

Selanjutnya karena diketahui bahwa $a_0 = 5, a_1 = 3, a_2 = 6,\ dan\ a_3 = -21,$ maka untuk mencari nilai-nilai *A, B, C,* dan *D,*

$$\begin{aligned} A + B + C &= 5 \\ -A + 2B + 3C + 3D &= 3 \\ A + 4B + 9C + 18D &= 6 \\ -A + 8B + 27C + 81D &= -21 \end{aligned}$$

Dengan menyelesaikan sistem persamaan linier ini, maka diperoleh A = 2 = C, B = 1, dan D = -1. Oleh karena itu penyelesaian dari relasi rekurensi dalam contoh ini adalah

$$a_n = 2(-1)^n + 2^n + 2.3^n - n3^n, n \geq 0.$$

Contoh 6.35. Carilah penyelesaian dari masing-masing relasi rekurensi di bawah ini, sesuai dengan syarat-syarat awal yang diberikan. Gunakan pendekatan iterasi.

a). $a_n = -a_{n-1,}\ a_0 = 5$
b). $a_n = a_{n-1} + 3, a_0 = 1$
c). $a_n = a_{n-1} - n, a_0 = 4$
d). $a_n = 2a_{n-1} - 3, a_0 = -1$
e). $a_n = (n+1)a_{n-1}, a_0 = -1$
f). $a_n = 2na_{n-1}, a_0 = 3$
g). $a_n = -a_{n-1} + n - 1, a_0 = 7$

Jawab. Di dalam pendekatan iterasi, a_n dinyatakan dengan suku-suku yang mengandung a_{n-1}, kemudian menyatakan a_{n-1} sebagai suku-suku yang mengandung a_{n-2}, dan seterusnya (menggunakan relasi rekurensi dengan mensubtitusi *n* menjadi $n-1$). Setelah prosedur tersebut sampai pada iterasi terakhir, maka langkah berikutnya adalah menggunakan nilai syarat awal yang ditentukan. Prosedur ini akan menghasilkan suatu rumusan eksplisit atau suatu deret berhingga yang jika dijumlahkan akan menghasilkan rumusan eksplisit dari jawaban yang dicari.

a). $a_n = -a_{n-1} = (-1)^2 a_{n-2} = \cdots = (-1)^n a_{n-n} = (-1)^n a_0 = 5 \cdot (-1)^n$

b). $a_n = 3 + a_{n-1} = 3 + 3 + a_{n-2} = 2\cdot 3 + a_{n-2} = 3\cdot 3 + a_{n-3} = \cdots$
$= n\cdot 3 + a_{n-n} = n\cdot 3 + a_0 = 3n + 1$

c). $a_n = -n + a_{n-1}$

$$
\begin{aligned}
&= -n + (-(n-1) + a_{n-2}) = -(n + (n-1)) + a_{n-2} \\
&= -(n + (n-1)) + (-(n-2) + a_{n-3}) = -(n + (n-1) + (n-2)) + a_{n-3} \\
&\vdots \\
&= -(n + (n-1) + (n-2) + \cdots + (n - (n-1))) + a_{n-n} \\
&= -(n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1) + a_0 \\
&= -\frac{n(+1)}{2} + 4 = \frac{-n^2 - n + 8}{2}
\end{aligned}
$$

d). $a_n = -3 + 2a_{n-1}$

$$
\begin{aligned}
&= -3 + 2(-3 + 2a_{n-2}) = -3 + 2(-3) + 4a_{n-2} \\
&= -3 + 2(-3) + 4(-3 + 2a_{n-3}) = -3 + 2(-3) + 4(-3) + 8a_{n-3} \\
&= -3 + 2(-3) + 4(-3) + 8(-3 + 2a_{n-4}) = -3 + 2(-3) + 4(-3) + 8(-3) + 16a_{n-4} \\
&\vdots \\
&= -3(1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1}) + 2^n a_{n-n} = -3(2^n - 1) + 2^n(-1) = -2^{n+2} + 3
\end{aligned}
$$

e). $a_n = (n+1)a_{n-1} = (n+1)na_{n-2}$

$$\begin{aligned}
&= (n+1)n(n-1)a_{n-3} = (n+1)n(n-1)(n-2)a_{n-4} \\
&\vdots \\
&= (n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-(n-2))a_{n-n} \\
&= (n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 2.a_0 \\
&= (n+1)!\cdot 2 = 2(n+1)!
\end{aligned}$$

f). $a_n = 2na_{n-1}$

$$\begin{aligned}
&= 2n(2(n-1)a_{n-2}) = 2^2(n(n-1))a_{n-2} \\
&= 2^2(n(n-1))(2(n-2)a_{n-3} = 2^3(n(n-1)(n-2))a_{n-3} \\
&\vdots \\
&= 2^n n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-(n-1))a_{n-n} \\
&= 2^n n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 1.a_0 \\
&= 3.2^n n!
\end{aligned}$$

g). $a_n = n-1-a_{n-1}$

$$\begin{aligned}
&= n-1-((n-1-1)-a_{n-2}) = (n-1)-(n-2)+a_{n-2} \\
&= (n-1)-(n-2)+((n-2-1)-a_{n-3}) = (n-1)-(n-2)+(n-3)-a_{n-3} \\
&\vdots \\
&= (n-1)-(n-2)+\cdots+(-1)^{n-1}(n-n)+(-1)^n a_{n-n} \\
&= \frac{2n-1+(-1)^n}{4}+(-1)^n\cdot 7
\end{aligned}$$

Contoh 6.36. Seorang pekerja bergabung dengan suatu perusahaan pada tahun 1999 dengan gaji permulaan Rp. 50.000., Setiap tahun pekerja tersebut mendapat kenaikan gaji Rp. 1000 ditambah 5% gaji dari tahun sebelumnya.

a) Susunlah relasi rekurensi dari gaji karyawan tersebut setelah *n* tahun terhitung sejak 1999.
b) Berapakah gaji karyawan tersebut pada tahun 2007?
c) Tentukan rumus untuk menyatakan besarnya gaji karyawan tersebut setelah *n* tahun bekerja, terhitung sejak 1999.

Jawab. Misalkan a_n adalah besarnya gaji karyawan dalam ribuan rupiah, *n* tahun sejak 1999.

a) $a_n = 1+1,05a_{n-1}$, dengan $a_0 = 50$

b) Diketahui n = 8. Jadi kita dapat melakukan iterasi sebanyak 8 kali atau menggunakan jawaban (c) sehingga diperoleh $a_8 = 83,4$ yang artinya gaji kayawan tersebut pada tahun 2007 adalah Rp. 83.400.

c) Jika digunakan pendekatan iteratif,

$$\begin{aligned}
a_n &= 1 + 1,05a_{n-1} \\
&= 1 + 1,05(1 + 1,05a_{n-2}) \\
&= 1 + 1,05 + (1,05)^2 a_{n-2} \\
&\vdots \\
&= 1 + 1,05 + (1,05)^2 + \cdots + (1,05)^{n-1} + (1,05)^n a_0 \\
&= \frac{(1,05)^n - 1}{1,05 - 1} + 50.(1,05)^n \\
&= 70.(1,05)^n - 20
\end{aligned}$$

Contoh 6.37. Tentukanlah penyelesaian dari relasi rekurensi di bawah ini, sesuai dengan syarat-syarat awal yang diberikan.

a). $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$ untuk $n \geq 2, a_0 = 3, a_1 = 6$

b). $a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2}$ untuk $n \geq 2, a_0 = 2, a_1 = 1$

c). $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2}$ untuk $n \geq 2, a_0 = 4, a_1 = 10$

d). $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ untuk $n \geq 2, a_0 = 4, a_1 = 1$

e). $a_n = a_{n-2}$ untuk $n \geq 2, a_0 = 5, a_1 = -1$

f). $a_n = -6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ untuk $n \geq 2, a_0 = 3, a_1 = -3$

g). $a_{n+2} = -4a_{n+1} + 5a_n$ untuk $n \geq 0, a_0 = 2, a_1 = 8$

Jawab. Untuk masing-masing masalah, akan dituliskan persamaan karakteristiknya kemudian mencari akar-akar persamaan karakteristik tersebut. Dengan nilai syarat awal yang diberikan maka persamaan dapat diselesaikan dan menentukan bilangan konstan di dalam penyelesaian umum.

a). $r^2 - r - 6 = 0 \qquad r = -2, 3$

$$a_n = \alpha_1(-2)^n + \alpha_2 3^n$$

$$\left.\begin{aligned} 3 &= \alpha_1 + \alpha_2 \\ 6 &= -2\alpha_1 + 3\alpha_2 \end{aligned}\right\} \alpha_1 = \tfrac{3}{5} \quad \alpha_2 = \tfrac{12}{5}$$

$$a_n = \tfrac{3}{5}(-2)^n + \tfrac{12}{5}(3)^n$$

b). $r^2 - 7r + 10 = 0 \qquad r = 2,5$

$$a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2 5^n$$

$$\left.\begin{aligned} 2 &= \alpha_1 + \alpha_2 \\ 1 &= 2\alpha_1 + 5\alpha_2 \end{aligned}\right\} \alpha_1 = 3, \quad \alpha_2 = -1$$

$$\therefore a_n = 3 \cdot 2^n - 5^n$$

c). $r^2 - 6r + 8 = 0, \quad r = 2,4$

$$a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2 4^n$$

$$\left.\begin{aligned} 4 &= \alpha_1 + \alpha_2 \\ 10 &= 2\alpha_1 + 4\alpha_2 \end{aligned}\right\} \alpha_1 = 3, \quad \alpha_2 = 1$$

$$\therefore a_n = 3 \cdot 2^n + 4^n$$

d). $r^2 - 2r + 1 = 0, \quad r = 1,1$

$$a_n = \alpha_1 1^n + \alpha_2 n 1^n = \alpha_1 + \alpha_2 n$$

$$\left.\begin{aligned} 4 &= \alpha_1 \\ 1 &= \alpha_1 + \alpha_2 \end{aligned}\right\} \alpha_1 = 4, \quad \alpha_2 = -3$$

$$\therefore a_n = 4 - 3n$$

e). $r^2 - 1 = 0, \quad r = -1,1$

$$a_n = \alpha_1 (-1)^n + \alpha_2 1^n = \alpha_1 (-1)^n + \alpha_2$$

$$\left.\begin{aligned} 5 &= \alpha_1 + \alpha_2 \\ -1 &= -\alpha_1 + \alpha_2 \end{aligned}\right\} \alpha_1 = 3, \quad \alpha_2 = 2$$

$$\therefore a_n = 3 \cdot (-1)^n + 2$$

f). $r^2 + 6r + 9 = 0, \quad r = -3,-3$

$$a_n = \alpha_1 (-3)^n + \alpha_2 (-3)^n$$

$$\left.\begin{aligned} 3 &= \alpha_1 \\ -3 &= -3\alpha_1 - 3\alpha_2 \end{aligned}\right\} \alpha_1 = 3, \quad \alpha_2 = -2$$

$$\therefore a_n = 3(-3)^n - 2n(-3)^n = (3 - 2n)(-3)^n$$

g). $r^2 + 4r - 5 = 0, \quad r = -5,1$

$$a_n = \alpha_1 (-5)^n + \alpha_2 1^n = \alpha_1 (-5)^n + \alpha_2$$

$$\left.\begin{aligned} 2 &= \alpha_1 + \alpha_2 \\ 8 &= -5\alpha_1 + \alpha_2 \end{aligned}\right\} \alpha_1 = -1, \quad \alpha_2 = 3$$

$$\therefore a_n = -(-5)^n + 3$$

Contoh 6.38. Selesaikanlah relasi rekurensi $a_n = 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 8a_{n-3}$ dengan $a_0 = 5$, $a_1 = 4$, dan $a_2 = 88$.

Jawab. Contoh ini berbentuk relasi rekurensi berderajat tiga. Persamaan karakteristiknya adalah $r^3 - 6r^2 + 12r - 8 = 0$. Akar persamaan ini adalah $r = 2$. Karena $r^3 - 6r^2 + 12r - 8 = (r-2)^3$. Jadi satu-satunya akar persamaan tersebut di atas adalah $r = 2$ dengan pemangkatan 3. Penyelesaian umum dari relasi rekurensi adalah

$$a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2 n 2^n + \alpha_3 n^2 2^n.$$

Selanjutnya dengan menggunakan nilai syarat awal,

$$\begin{aligned} -5 &= a_0 = \alpha_1 \\ 4 &= a_1 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 \\ 88 &= a_2 = 4\alpha_1 + 8\alpha_2 + 16\alpha_3 \end{aligned}$$

Setelah menyelesaikan ketiga persamaan ini, diperoleh

$$\alpha_1 = -5, \alpha_2 = \tfrac{1}{2}, \text{dan } \alpha_3 = \tfrac{13}{2}.$$

Akhirnya, jawaban untuk permasalahan ini adalah

$$a_n = -5 \cdot 2^n + (\tfrac{n}{2}) \cdot 2^n + (\tfrac{13n^2}{2}) \cdot 2^n = -5 \cdot 2^n + n \cdot 2^{n-1} + 13n^2 \cdot 2^{n-1}$$

Teknik penyelesaian relasi rekurensi homogen linier berkoefisien konstan seperti pada contoh-contoh di atas tidak dapat diberlakukan untuk menyelesaikan relasi rekurensi linier tetapi tidak homogen seperti $f_n = f_{n-1} + n$ dan $b_n = 2b_{n-1} + 1$ Penyelesaian masalah relasi rekurensi linier non-homogen berkoefisien konstan akan ditunjukkan pada bagian berikut ini.

D.2. Penyelesaian Relasi Rekurensi Homogen Linier Berkoefisien Konstan

Pendekatan dasar untuk menyelesaikan masalah relasi rekurensi homogen adalah dengan mencari penyelesaian yang berbentuk $a_n = r^n$, dengan nilai *r* konstan**.** Perhatikan bahwa $a_n = r^n$ adalah penyelesaian dari relasi rekurensi

$$a_n = c_1 r^{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} \tag{6.109}$$

jika dan hanya jika

$$r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + \cdots + c_k r^{n-k}. \qquad (6.110)$$

Jika kedua sisi dari persamaan ini dibagi dengan r^{n-k} kemudian ruas kanan dikurangi dengan ruas kirinya, maka diperoleh

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \cdots - c_{k-1} r - c_k = 0.$$

Akibatnya, barisan $\{a_n\}$ dengan merupakan suatu penyelesaian jika dan hanya jika *r* adalah penyelesaian dari persamaan terakhir, yang dinamakan **persamaan karakteristik** dari relasi rekurensi yang bersangkutan. Penyelesaian dari persamaan ini dinamakan **akar-akar karakteristik** dari relasi rekurensi. Akar-akar karakteristik ini dapat digunakan untuk merumuskan semua penyelesaian relasi rekurensi secara eksplisit.

Teorema 6.6. Misalkan c_1 dan c_2 adalah bilangan-bilangan real. Jika persamaan $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ memiliki dua akar yang berbeda yaitu r_1 dan r_2 maka barisan $\{a_n\}$ adalah penyelesaian dari relasi rekurensi $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ jika dan hanya jika $\alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ untuk $n = 0, 1, 2, \cdots,$ dengan α_1 dan α_2 adalah bilangan-bilangan konstan.

Bukti: Ada dua hal yang harus dilakukan untuk membuktikan teorema ini. Pertama, harus ditunjukkan bahwa jika r_1 dan r_2 adalah akar-akar karakteristik dari persamaan dan α_1 dan α_2 adalah bilangan-bilangan konstan, maka barisan $\{a_n\}$ dengan $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ adalah penyelesaian dari relasi rekurensi. Kedua, harus juga ditunjukkan bahwa jika $\{a_n\}$ meruapakan suatu penyelesaian, maka $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ untuk suatu bilangan konstan α_1 dan α_2.

Sekarang akan dutunjukkan bahwa jika $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ maka $\{a_n\}$ adalah penyelesaian dari relasi rekurensi. Karena r_1 dan r_2 adalah akar-akar dari persamaan $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ maka $r_1^2 = c_1 r_1 + c_2, \quad r_2^2 = c_1 r_2 + c_2$. Dari persamaan-persamaan ini,

$$\begin{aligned} c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} &= c_1(\alpha_1 r_1^{n-1} + \alpha_2 r_2^{n-1}) + (\alpha_1 r_1^{n-2} + \alpha_2 r_2^{n-2}) \\ &= \alpha_1 r_1^{n-2}(c_1 r_1 + c_2) + \alpha_2 r_2^{n-2}(c_1 r_2 + c_2) \\ &= \alpha_1 r_1^{n-2} r_1^2 + \alpha_2 r_2^{n-2} r_2^2 \\ &= \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n \\ &= a_n. \end{aligned}$$

Contoh 6.39. Tentukanlah penyelesaian dari relasi rekurensi $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ dengan syarat-syarat awal $a_0 = 1$ dan $a_1 = 6$.

Jawab. Satu-satunya akar penyelesaian dari $r^2 - 6r + 9 = 0$ adalah $r = 3$. Karena itu, penyelesaian dari relasi rekurensi ini adalah $a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 n3^n$

Contoh 6.40. Carilah penyelesaian dari relasi rekurensi $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$ dengan syarat-syarat awal $a_0 = 2, a_1 = 5, \text{dan } a_2 = 15.$

Jawab. Polinomial karakteristik dari relasi rekurensi ini adalah $r^3 - 6r^2 + 11r - 6$. Akar-akar karakteristiknya adalah $r = 1, r = 2, \text{dan } r = 3,$ karena relasi rekurensi tersebut di atas dapat dituliskan menjadi $(r-1)(r-2)(r-3)$. Karena itu, penyelesaian dari relasi rekurensi ini akan berbentuk $a_n = \alpha_1.1^n + \alpha_2.2^n + \alpha_3 3^n$. Untuk mengetahui nilai-nilai $\alpha_1, \alpha_2, \text{dan } \alpha_3$ maka digunakan syarat-syarat awal sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
a_0 &= 2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \\
a_1 &= 5 = \alpha_1 + \alpha_2.2 + \alpha_3.3, \\
a_2 &= 15 = \alpha_1 + \alpha_2.4 + \alpha_3.9.
\end{aligned}$$

Dengan menyelesaikan ketiga persamaan simultan ini maka diperoleh $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1, \text{dan } \alpha_3 = 2.$ Jadi, penyelesaian unik untuk relasi rekurensi tersebut adalah barisan $\{a_n\}$ dengan $a_n = 1 - 2^n + 2 \cdot 3^n$ sesuai dengan syarat-syarat awal yang diberikan.

Teorema 6.7. Misalkan $c_1, c_2, \cdots, c_k$ adalah bilangan-bilangan real. Jika persamaan karakteristik $r^k - c_1 r^{k-1} - \cdots - c_k = 0$ memiliki *t* akar-akar yang berbeda yaitu $r_1, r_2, \cdots, r_t$ masing-masing dengan pemangkatan $m_1, m_2, \cdots, m_t$ sehingga $m_i \geq 1$ untuk $i = 1, 2, 3, \cdots, t$ dan $m_1 + m_2 + \cdots + m_t = k,$ maka barisan $\{a_n\}$ adalah penyelesaian dari relasi rekurensi

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n+2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

jika dan hanya jika

$$\begin{aligned}
a_n = \ & (\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1} n + \cdots + \alpha_{1,m_1-1} n^{m_1-1}) r_1^n \\
& + (\alpha_{2,0} + \alpha_{2,1} n + \cdots + \alpha_{2,m_2-1} n^{m_2-1}) r_2^n \\
& + \cdots + (\alpha_{t,0} + \alpha_{t,1} n + \cdots + \alpha_{t,m_t-1} n^{m_t-1}) r_t^n
\end{aligned}$$

untuk $n = 0, 1, 2, \cdots,$ dimana $\alpha_{i,j}$ adalah bilangan-bilangan konstan untuk $1 \leq i \leq t$ dan $0 \leq j \leq m_i - 1.$

Contoh 6.41. Misalkan akar-akar persamaan karakteristik dari suatu relasi rekurensi homogen linier adalah 2, 2, 2, 5, 5, dan 9 (tiga akar berbeda yaitu akar 2 dengan pemangkatan 3, akar 5 dengan pemangkatan 2, dan akar 9 dengan pemangkatan 1). Bagaimanakah bentuk dari penyelesaian umumnya?

Jawab. Berdasarkan Teorema 6.3, penyelesaian umumnya adalah $(\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1}n + \alpha_{1,2}n^2)2^n + (\alpha_{2,0} + \alpha_{2,1}n)5^n + \alpha_{3,0}9^n.$ Selanjutnya untuk menyelesaikan relasi rekurensi homogen linier berkoefisien konstan jika persamaan karakteristiknya memiliki akar pemangkatan 3, dapat dilihat pada Contoh 6.42.

Contoh 6.42. Carilah penyelesaian dari relasi rekurensi $a_n = -3a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3}$ dengan syarat-syarat awal $a_0 = 1, a_1 = -2$ dan $a_2 = -1.$

Jawab. Persamaan karakteristik dari relasi rekurensi ini adalah $r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = 0.$ Karena bentuk tersebut dapat dinyatakan dengan $(r+1)^3,$ berarti terdapat akar unik yaitu $r = -1$ dengan pemangkatan 3 untuk persamaan karakteristik tersebut. Menurut Teorema 6.4, penyelesaian dari relasi rekurensi ini berbentuk $a_n = \alpha_{1,0}(-1)^n + \alpha_{1,1}n(-1)^n + \alpha_{1,2}n^2(-1)^n.$ Nilai $\alpha_{1,0},\ \alpha_{1,1},$ dan $\alpha_{1,2}$ dapat diketahui dengan menggunakan syarat-syarat awal yang diberikan. Dalam hal ini,

$$a_0 = 1 = \alpha_{1,0}$$
$$a_2 = -2 = -\alpha_{1,1} - \alpha_{1,2},$$
$$a_2 = -1 = \alpha_{1,0} + 2\alpha_{1,1} + 4\alpha_{1,2}.$$

Dari ketiga persamaan ini diperoleh nilai-nilai $\alpha_{1,0} = 1, \alpha_{1,1} = 3,$ dan $\alpha_{1,2} = -2.$ Jadi, penyelesaian relasi rekurensi ini adalah $\{a_n\}$ dengan $a_n = (1 + 3n - 2n^2)(-1)^n.$

D.3. Relasi Rekurensi Nonhomogen Linier Berkoefisien Konstan

Bentuk umum relasi rekurensi linier nonhomogen dengan koefisien konstan adalah sebagai berikut:

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \cdots + c_ka_{n-k} + f(n) \qquad (6.111)$$

dengan $c_1, c_2, \cdots, c_k \in \mathbb{R}, c_k \neq 0,$ dan $f(n)$ tidak identik dengan nol. Penyelesaian relasi rekurensi seperti ini tergantung pada relasi rekurensi linier homogen dengan koefisien konstan yang bersesuaian

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} \tag{6.112}$$

Persamaan ini dinamakan relasi rekurensi homogen yang bersesuaian (dengan relasi rekurensi nonhomogen liner berkoefisien konstan).

D.4. Penyelesaian Relasi Rekurensi Nonhomogen Linier Berkoefisien Konstan

Adakah teknik sederhana untuk menyelesaikan relasi rekurensi non-homogen linier berkoefisien konstan seperti $a_n = 3a_{n-1} + 2n$? Untuk menyelesaikan relasi rekurensi linier nonhomogen dengan koefisien konstan (6.28), misalkan $a_n^{(h)}$ menyatakan penyelesaian umum dari relasi rekurensi (6.29) yang bersesuaian dengan (6.28); dan misalkan diketahui $a_n^{(p)}$ adalah beberapa penyelesaian khusus dari (6.28). Penyelesaian umum dari (6.29) dinyatakan dengan

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$$

Hal ini sesuai dengan Teorema 6.8 di bawah ini. Mahasiswa diharapkan dapat membuktikan teorema tersebut.

Teorema 6.8. Misalkan $a_n^{(h)}$ menyatakan penyelesaian umum dari relasi rekurensi homogen linier dengan koefisien konstan (6.29) dan $a_n^{(p)}$ menyatakan penyelesaian khusus dari relasi rekurensi nonhomogen linier dengan koefisien konstan (6.28), maka $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$ adalah penyelesaian umum dari relasi rekurensi linier nonhomogen dengan koefisien konstan (6.28).

Berdasarkan Teorema 6.8, penyelesaian relasi rekurensi nonhhomogen linier (6.28) bergantung pada cara mendapatkan penyelesaian khusus $a_n^{(p)}$. Meskipun tidak ada algoritma umum untuk menyelesaikan sebarang relasi rekurensi nonhomogen linier dengan koefisien konstan, ada dua kasus khusus di antaranya yang dapat diidentifikasi. Jika $f(n)$ merupakan polinomial dalam *n* atau berbentuk $C\alpha^n$, maka suatu penyelesaian khusus dapat dicari dengan mudah, seperti ditunjukkan pada dua contoh di bawah ini, dengan *C* dan α adalah bilangan konstan. Teknik yang digunakan sama dengan yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial nonhomogen linier.

Contoh 6.43. Relasi rekurensi berbentuk

$$a_n = a_{n-1} + 2^n,$$
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + n^2 + n + 1,$$
$$a_n = 3a_{n-1} + n3^n,$$
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + n!$$

merupakan contoh-contoh dari relasi rekurensi nonhomogen linier berkoefisien konstan. Masing-masing relasi rekurensi nonhomogen ini memiliki relasi rekurensi homogen linier yang bersesuaian, yaitu

$$a_n = a_{n-1},$$
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2},$$
$$a_n = 3a_{n-1},$$
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}.$$

Fakta utama tentang relasi rekurensi nonhomogen linier berkoefisien konstan adalah bahwa setiap penyelesaiannya merupakan jumlahan dari suatu penyelesaian khusus dengan penyelesaian relasi rekurensi homogen linier yang bersesuaian bentuknya.

Contoh 6.44. Selesaikanlah relasi rekurensi nonhomogen linier dengan koefisien konstan $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 8a_n^2$, dimana $a_0 = 4$ dan $a_1 = 7$.

Jawab. Berdasarkan Contoh 6.43, penyelesaian umum dari relasi rekurensi homognen linier dengan koefisien konstan yang bersesuaian dengan masalah pada contoh ini, yaitu $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ dinyatakan dengan $a_n^{(h)} = A.2^n + B.3^n$. Karena $f(n) = 8n^2$ merupakan polinomial kuadrat dalam *n*, cukup beralasan mencari penyelesaian khusus yang juga berbentuk kuadratis, misalnya $a_n = an^2 + bn + c$. Dengan demikian relasi rekurensi akan berbentuk:

$$
\begin{aligned}
an^2+bn+c &= 5\left[a\left(n-1\right)^2+b\left(n-1\right)+c\right] \\
&\quad -6\left[a\left(n-2\right)^2+b\left(n-2\right)+c\right] \\
&\quad +8n^2 \\
&= \left(8-a\right)n^2+\left(14a-b\right)n-19a+7b-c
\end{aligned}
$$

Dengan menyesuaikan koefisien dari suku yang sejenis, diperoleh sistem linier sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
&a=8-a \\
&b=14a-b \\
&c=-19a+7b-c
\end{aligned}
$$

Sehingga $a=4, b=28,$ dan $c=60.$

Sekarang dapat diklaim bahwa penyelesaian khusus dari relasi rekurensi di atas adalah

$$a_n^{(p)}=4n^2+28n+60$$

Dan menurut Teorema 6.8, penyelesaian umum dari relasi rekurensi tersebut adalah

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_n^{(h)}+a_n^{(p)} \\
&= A.2^n+B.3^n+4n^2+28n+60
\end{aligned}
$$

Dengan menggunakan kedua syarat awal yang diberikan, maka diperoleh sistem linier sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
A+B&=-56 \\
2A+3B&=-85
\end{aligned}
$$

yang menghasilkan *A* = -83 dan *B* = 27. Penyelesaian dari relasi rekurensi nonhomogen linier dengan koefisien konstan di atas adalah

$$a_n=\left(-83\right).2^n+27.3^n+4n^2+28n+60,\quad n\geq 0.$$

Contoh 6.45 berikut ini mengilustrasikan cara penyelesaian relasi rekurensi kinier nonhomogen dengan koefisien konstan jika $f(n)$ berbentuk $C\alpha^n$, dengan C dan α adalah bilangan konstan.

Contoh 6.45. Selesaikanlah relasi rekurensi kinier nonhomogen dengan koefisien konstan $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 3.5^n$, dengan $a_0 = 4$ dan $a_1 = 7$.

Jawab: Relasi rekurensi linier homogen dengan koefisien konstan yang bersesuaian dengan bentuk di atas adalah $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ yang memiliki penyelesaian umum $a_n^{(h)} = A.2^n + B.3^n$. Karena $f(n) = 3.5^n$, maka penyelesaian khusus yang akan dicari adalah yang berbentuk $a_n = c.5^n$. Jadi, $c \cdot 5^n = 5\left(c \cdot 5^{n-1}\right) - 6\left(c \cdot 5^{n-2}\right) + 3 \cdot 5^n$. Jika kedua sisi dibagi dengan 5^{n-2}, maka diperoleh $c = 25/2$. Oleh karena itu $a_n = (25/2)5^n$ adalah penyelesaian khusus dari relasi rekurensi linier homogen dengan koefisien konstan. Berdasarkan penyelesaian relasi rekurensi linier homogen dengan koefisien konstan yang telah diperoleh di atas, maka diperoleh relasi rekurensi linier nonhomogen dengan koefisien konstan, yaitu:

$$a_n = A.2^n + B.3^n + (25/2)5^n.$$

Selanjutnya dengan menggunakan syarat awal yang diberikan, diperoleh sistem linier:

$$\begin{aligned} A + B &= -17/2 \\ 2A + 3B &= -111/2 \end{aligned}$$

Dari penyelesaian sistem linier tersebut diketahui nilai A = 30 dan B = -77/2. Dengan mensubtitusi nilai-nilai tersebut di atas, diperoleh penyelesaian dari relasi rekurensi linier nonhomogen dengan koefisien konstan, adalah

$$a_n = (30).2^n - (77/2).3^n + (25/2).5^n, n \geq 0.$$

Perhatikan bahwa pada contoh ini, faktor 5 di dalam $f(n)$ bukan akar karakteristik dari relasi rekurensi linier homogen berkoefisien konstan yang bersesuaian. Jika 5 merupakan akar karakteristik, maka harus dilakukan penyesuaian untuk menentukan penyelesaian khusus. Teorema di bawah ini menjelaskan teknik yang digunakan pada kedua contoh sebelumnya. Pembuktian teorema dapat dilakukan oleh mahasiswa.

Teorema 6.9. Dari masalah relasi rekurensi linier nonhomogen berkoefisien konstan (6.28), misalkan $f(n) = \left(b_k n^k + b_{k-1} n^{k-1} + \cdots + b_1 n + b_0\right)\alpha^n$. Jika α bukan merupakan akar karakteristik dari relasi rekurensi linier homogen berkoefisien konstan yang bersesuaian

(6.29), maka salah satu penyelesaian khusus dari relasi rekurensi tersebut akan berbentuk $\left(d_k n^k + d_{k-1} n^{k-1} + \cdots + d_1 n + d_0\right)\alpha^n$. Jika α adalah akar karakteristik dengan derajat keraaman *m*, maka penyelesaian khusus relasi rekurensi tersebut akan berbentuk $n^m\left(e_k n^k + e_{k-1} n^{k-1} + \cdots + e_1 n + e_0\right)\alpha^n$. Hal ini dibuktikan pada Contoh 6.46.

Contoh 6.46. Dari Contoh 6.45, penyelesaian umum dari relasi rekurensi linier homogen dengan koefisien konstan adalah $a_n^{(h)} = A.3^n + B.n3^n$, dengan $n \geq 0$. Karena 3 adalah akar karakteristik dengan derajat keragaman 2, maka harus dicari penyelesaian khusus yang berbentuk $n^2(cn+d)3^n$, dimana konstanta *c* dan *d* akan ditentukan kemudian. Dengan demikian,

$$
\begin{aligned}
n^2(cn+d)3^n = 6&\left\{(n-1)^2\left[c(n-1)+d\right]3^{n-1}\right\} \\
&-9\left\{(n-2)^2\left[c(n-2)+d\right]3^{n-2}\right\} + 4(n+1)3^n
\end{aligned}
$$

Dengan menyamakan koefisien-koefisien dari suku-suku yang sama, diperoleh *c* = 2/3 dan *d* = 4 sehingga $a_n^{(p)} = 2n^2(n+6)3^{n-1}$. Jadi penyelesaian umum dari relasi rekurensi adalah

$$a_n = A.3^n + B.n3^n + 2n^2(n+6)3^{n-1},\ n \geq 0.$$

Dengan menggunakan syarat-syarat awal ini, diperoleh

$$a_n = (6-19n)3^{n-1} + 2n^2(n+6)3^{n-1},\ n \geq 0.$$

Contoh 6.47. Tentukan relasi rekurensi dari jumlah barisan angka biner *n* digit jika tidak terdapat angka 1 yang berurutan.

Jawab: Misalkan a_n adalah jumlah barisan angka biner (0 dan 1) maka:

$n=1$	0	1							
$n=2$		00	01	10					
$n=3$		000	010	100	001	101			
$n=4$		0000	0100	1000	0010	1010	0001	0101	1001

Dapat dilihat bahwa $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5, \cdots$. Untuk $n \geq 3$ diperoleh barisan *n* angka biner sebagai berikut.

a. Tambahkan 0 pada digit terakhir pada barisan *n* – 1 digit
b. Tambahkan 01 pada digit terakhir pada barisan *n* – 2 digit

Kedua langkah di atas tidak akan tumpang tindih karena masing-masing menghasilkan barisan dengan digit yang berbeda. Artinya langkah tersebut menghasilkan barisan *n* digit dengan tidak ada pasangan satu yang berurutan, dan sebaliknya, sebarang barisan *n* digit dengan tidak ada pasangan satu yang berurutan adalah dihasilkan dari satu langkah. Digit terakhir 0 dalam barisan tersebut dihasilkan dari langkah pertama, dan digit terakhir 1 dihasilkan dari langkah kedua, karena langkah kedua ditambahkan 01. Jadi rekurensinya adalah $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, dan relasi rekurensinya adalah

$$a_1 = 2, a_2 = 3, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n \geq 3.$$

Perhatikan bahwa ada satu barisan yang tidak ada digitnya untuk *n* = 0 sehingga $a_0 = 1, a_1 = 2, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n \geq 2$. Relasi rekurensi ini dinamakan relasi Fibonacci dengan syarat awal yang berbeda.

Toerema 6.10. Jika $\{a_n^{(p)}\}$ adalah penyelesaian khusus untuk relasi rekurensi nonhomogen linier berkoefisien konstan $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \cdots + c_ka_{n-k} + f(n),$ maka setiap penyelesaiannya akan berbentuk $\{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$, dimana $\{a_n^{(h)}\}$ adalah penyelesaian dari relasi rekurensi homogen linier yang bersesuaian dengan relasi rekurensi nonhomogen tersebut, yaitu $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \cdots + c_ka_{n-k}$.

Bukti. Karena $\{a_n^{(p)}\}$ adalah penyelesaian khusus dari relasi rekurensi nonhomogen, maka dapat diketahui bahwa $a_n^{(p)} = c_1a_{n-1}^{(p)} + c_2a_{n-2}^{(p)} + \cdots + c_ka_{n-k}^{(p)} + f(n)$. Selanjutnya, misalkan bahwa $\{b_n\}$ adalah penyelesaian kedua dari relasi rekurensi nonhomogen, sedemikian sehingga $b_n = c_1b_{n-1} + c_2b_{n-2} + \cdots + c_kb_{n-k} + f(n)$. Dari kedua bentuk di atas, diperoleh $b_n - a_n^{(p)} = c_1(b_{n-1} - a_{n-1}^{(p)}) + c_2(b_{n-2} - a_{n-2}^{(p)}) + \cdots + c_k(b_{n-k} - a_{n-k}^{(p)})$. Hal ini menunjukkan bahwa $\{b_n - a_n^{(p)}\}$ merupakan suatu penyelesaian dari relasi rekurensi homogen yang bersesuaian, misalnya $\{a_n^{(p)}\}$. Jadi, $b_n = a_n^{(p)} + a_n^{(h)}$ untuk semua *n*.

Contoh 6.48. Carilah semua penyelesaian dari relasi rekurensi $a_n = 3a_{n-1} + 2n.$ Tentukan juga penyelesaiannya jika diketahui $a_1 = 3.$

Jawab. Untuk menyelesaikan relasi rekurensi nonhomogen linier berkoefisien konstan ini, maka harus diketahui penyelesaian dari bentuk relasi rekurensi homogen linier yang bersesuaian, kemudian menentukan penyelesaian khusus untuk relasi rekurensi nonhomogen linier. Bentuk homogen yang bersesuaian adalah $a_n = 3a_{n-1}$ dan penyelesaiannya adalah $a_n^{(h)} = \alpha 3^n$, dengan α adalah bilangan konstan.

Selanjutnya akan ditentukan penyelesaian khusus. Karena $f(n) = 2n$ merupakan suatu polinomial dalam *n* yang berderajat satu, maka penyelesaiannya dapat dinyatakan sebagai suatu fungsi linier dalam *n*, misalkan $p_n = cn + d,$ dimana *c* dan *d* adalah bilangan-bilangan konstan. Untuk menentukan apakah ada penyelesaian yang berbentuk seperti ini, andaikan bahwa $p_n = cn + d$ adalah penyelesaian yang dimaksud. Selanjutnya persamaan $a_n = 3a_{n-1} + 2n$ sekarang berubah menjadi $cn + d = 3(c(n-1) + d) + 2n.$ Dengan menyederhanakan dan menggabungkan suku-suku yang sejenis, diperoleh $(2 + 2c)n + (2d - 3c) = 0.$ Hal ini menunjukkan bahwa $cn + d$ merupakan penyelesaian jika dan hanya jika $2 + 2c = 0$ dan $2d - 3c = 0.$ Hal ini menunjukkan bahwa $cn + d$ adalah penyelesaian jika dan hanya jika $c = -1$ dan $d = -\frac{3}{2}.$ Akibatnya, $a_n^{(p)} = -n - \frac{3}{2}$ adalah suatu penyelesaian khusus. Menurut Teorema 6.10, semua penyelesaian berbentuk $a_n = a_n^{(p)} + a_n^{(h)} = -n - \frac{3}{2} + \alpha \cdot 3^n,$ dengan α adalah bilangan konstan. Untuk menentukan penyelesaian dengan $a_1 = 3,$ pilih $n = 1$ di dalam rumus yang diperoleh dalam bentuk penyelesaian umum. Dapat dilihat bahwa $3 = -n - \frac{3}{2} + 3\alpha,$ yang menunjukkan bahwa $\alpha = \frac{11}{6}.$ Penyelesaian yang dicari adalah $a_n = -n - \frac{3}{2} + (\frac{11}{6})3^n.$

Contoh 6.49. Carilah penyelesaian dari relasi rekurensi $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 7^n.$

Jawab. Bentuk ini adalah relasi rekurensi nonhomogen linier. Penyelesaian relasi rekurensi homogen yang bersesuaian $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ adalah $a_n^{(h)} = \alpha_1 \cdot 3^n + \alpha_2 \cdot 2^n,$ dengan α_1 dan α_2 adalah bilangan konstan. Karena $f(n) = 7^n,$ maka penyelesaiannya berbentuk $a_n^{(p)} = C \cdot 7^n,$ dengan C adalah bilangan konstan. Dengan mensubtitusikan suku-suku barisan ini ke dalam relasi rekurensi, diperoleh $C \cdot 7^n = 5C \cdot 7^{n-1} - 6C \cdot 7^{n-2} + 7^n.$

Dengan memfaktorkan 7^{n-2}, persamaan ini menjadi $49C = 35C - 6C + 49$, sehingga diperoleh $20C = 49$ atau $C = \frac{49}{20}$. Dengan demikian, diperoleh penyelesaian khusus $a_n^{(p)} = (\frac{49}{20})7^n$. Berdasarkan Teorema 6.10, diperoleh $a_n = \alpha_1 \cdot 3^n + \alpha_2 \cdot 2^n + (\frac{49}{20})7^n$.

Contoh 6.50. Tentukanlah penyelesaian khusus dari relasi rekurensi nonhomogen linier $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + f(n)$ jika diketahui $f(n) = 3^n, f(n) = n3^n, f(n) = n^2 2^n$, dan $f(n) = (n^2 + 1)3^n$.

Jawab. Relasi rekurensi homogen linier yang bersesuaian adalah $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$. Persamaan karakteristiknya $r^2 - 6r + 9 = (r-3)^2 = 0$ memiliki akar tunggal yaitu 3 dengan pemangkatan 2. Dengan $f(n)$ yang berbentuk $P(n)s^n$, dimana $P(n)$ adalah polinomial dan *s* adalah bilangan konstan, maka harus ditunjukkan apakah *s* merupakan akar dari persamaan karakteristik ini. Karena $s = 3$ adalah akar persamaan karakteristik dengan pemangkatan $m = 2$ sedangkan $s = 2$ bukan akar persamaan karakteristik, maka penyelesaian khusus yang diperoleh adalah $p_0 n^2 3^n$ jika $f(n) = 3^n$, berbentuk $n^2(p_1 n + p_0)3^n$ jika $f(n) = n3^n$, berbentuk $(p_2 n^2 + p_1 n + p_0)2^n$ jika $f(n) = n^2 2^n$, dan berbentuk $n^2(p_2 n^2 + p_1 n + p_0)3^n$ jika $f(n) = (n^2 + 1)3^n$.

E. Soal-Soal Latihan

1. Tentukan penyelesaian khusus dari masing-masing relasi rekurensi di bawah ini:
   a). $a_r + 5a_{r-1} + 6a_{r-2} = 3r^2 - 2r + 1$.
   b). $a_r - 5a_{r-1} + 6\ a_{r-2} = 1$.
   c). $a_r - 4\ a_{r-1} + 4\ a_{r-2} = (r+1)2^r$.
2. Tentukan penyelesaian total dari masing-masing relasi rekurensi di bawah ini:
   a). $a_r - 7a_{r-1} + 10a_{r-2} = 3^r$ dengan $a_0 = 0$ dan $a_1 = 1$.
   b). $a_r + 6a_{r-1} + 9a_{r-2} = 3$ dengan $a_0 = 0$ dan $a_1 = 1$.
3. Selesaikanlah relasi rekurensi berikut ini.
   a). $a_n = 2a_{n-1} + 1,\ a_0 = 1$
   b). $a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2} + n^2,\ a_0 = 0, a_1 = 1$
   c). $a_n = 7a_{n-1} - 12a_{n-2} + 3^n,\ a_0 = 0, a_1 = 2$
   d). $a_n = 7a_{n-1} - 12a_{n-2} + 3n4^n,\ a_0 = 0, a_1 = 2$
   e). $a_n = a_{n-1} + n,\ a_0 = 1$
   f). $a_n = a_{n-1} + n - 1,\ a_1 = 0$

4. Selesaikanlah relasi rekurensi linier homogen berkoefisien konstan di bawah ini.

   a). $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}, a_0 = 3, a_1 = 0$
   b). $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}, a_0 = 4, a_1 = 7$
   c). $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}, a_0 = 5, a_1 = 0$
   d). $a_n = 4a_{n-2}, a_0 = 2, a_1 = -8$
   e). $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, a_0 = 1, a_1 = 2$
   f). $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, a_0 = 2, a_1 = 3$
   g). $a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} - 12a_{n-3}, a_0 = 3, a_1 = -7, a_2 = 7$
   h). $a_n = 8a_{n-1} - 21a_{n-2} + 18a_{n-3}, a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = 13$
   i). $a_n = 7a_{n-1} - 16a_{n-2} + 12a_{n-3}, a_0 = 0, a_1 = 5, a_2 = 19$

5. Tentukan apakah relasi rekurensi di bawah ini linier homogen atau linier nonhomogen.

   a). $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ b). $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$
   c). $a_n = 1.08a_{n-1}$ d). $b_n = 2b_{n-1} + 1$
   e). $a_n = a_{n-1} + n$ f). $a_n = 2a_{n-1} + (2^n - 1)$
   g). $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 3a_{n-5}$ h). $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-3} + n^2$

6. Carilah bentuk umum dari salah satu penyelesaian khusus relasi rekurensi linier homogen dengan koefisien konstan yang bersesuaian dengan relasi rekurensi linier nonhomogen dengan koefisien konstan untuk setiap fungsi $f(n)$ sesuai dengan

   a). $f(n) = n$ b). $f(n) = 1$ c). $f(n) = 3n^2$
   d). $f(n) = 3^n$ e). $f(n) = n2^n$ f). $f(n) = 43n^2 5^n$

7. Carilah bentuk umum dari salah satu penyelesaian khusus relasi rekurensi linier homogen dengan koefisien konstan yang bersesuaian dengan relasi rekurensi linier nonhomogen dengan koefisien konstan $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + f(n)$ untuk setiap fungsi di bawah ini.

   a). $f(n) = 3.2^n$ b). $f(n) = n2^n$
   c). $f(n) = 23n^2 2^n$ d). $f(n) = (17n^3 - 1)2^n$

8. Dengan menggunakan fungsi pembangkit, selesaikanlah masalah relasi rekurensi homogen linier berkoefisien konstan di bawah ini.

a). $a_n = 2a_{n-1}, a_0 = 1$

b). $a_n = a_{n-1} + 1, a_1 = 1$

c). $a_n = a_{n-1} + 2, a_1 = 1$

d). $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}, a_0 = 3, a_1 = 0$

e). $a_n = 4a_{n-2}, a_0 = 2, a_1 = -8$

f). $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}, a_0 = 5, a_1 = 0$

g). $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}, a_0 = 4, a_1 = 7$

h). $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, a_0 = 1, a_1 = 2$

i). $a_n = 8a_{n-1} - 21a_{n-2} + 18a_{n-3}, a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = 13$

j). $a_n = 7a_{n-1} - 16a_{n-2} + 12a_{n-3}, a_0 = 0, a_1 = 5, a_2 = 19$

9. Nyatakanlah masing-masing pembagian di bawah ini menjadi pecahan parsial.

a). $\dfrac{x+7}{(x-1)(x+3)}$

b). $\dfrac{4x^2 - 3x - 25}{(x+1)(x-2)(x+3)}$

c). $\dfrac{5}{1 - x - 6x^2}$

d). $\dfrac{2+4x}{1+8x+15x^2}$

e). $\dfrac{x(x+2)}{(2+3x)(x^2+1)}$

f). $\dfrac{-2x^2 - 2x + 2}{(x-1)(x^2+2x)}$

g). $\dfrac{x^3 + x^2 + x + 3}{x^4 + 5x^2 + 6}$

h). $\dfrac{-x^3 + 2x^2 + x}{x^4 + x^3 + x + 1}$

10. Dengan metode iterasi, perkirakanlah suatu penyelesaian dari masing-masing relasi rekurensi yang memenuhi syarat awal yang diberikan di bawah ini.

a). $s_0 = 1$
$s_n = 2s_{n-1}, n \geq 1$

b). $a_1 = 1$
$a_n = a_{n-1} + n, n \geq 2$

c). $a_0 = 1$
$a_n = a_{n-1} + n, n \geq 1$

d). $a_1 = 1$
$a_n = a_{n-1} + (2n-1), n \geq 2$

e). $a_0 = 0$
$a_n = a_{n-1} + 4n, n \geq 1$

f). $s_1 = 1$
$s_n = s_{n-1} + n^3, n \geq 2$

g). $s_1 = 1$
$s_n = s_{n-1} + n^2, n \geq 2$

h). $a_1 = 1$
$a_n = 2a_{n-1} + (2^n - 1), n \geq 2$

11. Tunjukkan bahwa

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{jika } n = 1 \\ a_{n-1} + n/2 & \text{jika } n > 1 \text{ dan ganjil} \\ a_{n-1} + (n-1)/2 & \text{jika } \; n > 1 \text{ dan ganjil} \end{cases}$$

DAFTAR PUSTAKA

Bóna, Miklós (Ed.), 2015. *Handbook of Enumerative Combinatorics,* Florida, USA: CRC Press Taylor & Francis Group.

Bogart, Kenneth P., 2000. *Introductory Combinatorics, 3rd Edition*, Burlington, Massacussets, USA: Harcourt/Academic Press.

Brualdi, Richard A., 2004. *Introductory Combinatorics 4th Edition,* New Jersey, USA: Pearson Education, Inc.

Cameron, Peter, 1994. *Combinatorics: Topics, Techniques, Algorithms,* England: Cambridge University Press.

Conradie, Willem,, Valentin Goranko, Claudette Robinson, 2015. *Logic and Discrete Mathematics – A Concise Introduction, Solutions Manual,* United Kongsom: John Wiley and Sons Ltd.

Ferland, Kevin, 2009. *Discrete Mathematics,* Boston, USA: Houghton Mifflin Company.

Grimaldi, Ralph P., 2004. *Discrete and Combinatorial Mathematics – An Applied Introduction 5th Edition,* Boston, USA: Pearson Education Inc.

Hammack, Richard, 2013. *Book of Proof 2nd Edition,* Virginia, Richard Hammack Publisher.

Hilbert, D., dan Ackermann, W., 1950. *Principles of Mathematical Logic,* New York: Chelsea Publishing Company.

Hunter, David J., 2017, *Essentials of Discrete Mathematics 3rd Edition,* California, USA: Jones & Bartlett Learning.

Jackson, Bradley W., and Thoro, Dmitri, 1990, *Applied Combinatorics With Problem Solving,* Canada: Addison-Wesley Publishing Company.

Koshy, Thomas, 2004. *Discrete Mathematics with Applications,* California, USA: Elsevier Academic Press.

Rosen, Kenneth H., 2012. *Discrete Mathematics and Its Applications 7th Edition*, New York, USA: The McGraw-Hill Companies,

S. Epp., Susanna, 2011. *Discrete Mathematics: An Introduction to Mathematical Reasoning,* Boston, USA: Broks/Cole Cengage Learning.

Srivastava, H. M., dan Manocha, H, L., 1984. *A Treatise on Generating Functions,* England: Ellis Horwood Limited.

Townsend, Michael, 1987. *Discrete Mathematics: Applied Combinatorics and Graph Theory,* Menlo Park, California: The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc.

RIWAYAT HIDUP

Enos Lolang, adalah dosen tetap pada Program Studi Pendidikan Matematika – Universitas Kristen Indonesia Toraja. Setelah menyelesaikan pendidikan Sarjana Sains dari Jurusan Fisika Universitas Hasanuddin pada tahun 1996, penulis bertugas sebagai dosen tetap Program Studi Pendidikan Matematika UKI Toraja sejak tahun 2001. Selanjutnya tahun 2010 ditugaskan melanjutkan pendidikan pascasarjana di Universitas Negeri Malang, Program Studi Pendidikan Matematika dan menyelesaikan studi tahun 2013.

Selain menulis buku Pengantar Matematika Diskrit Dengan Pendekatan *Problem Solving*, penulis juga telah menyusun buku ajar yang dipublikasikan maupun yang khusus digunakan dalam lingkungan sendiri. Buku yang telah ditulis antara lain Aljabar Abstrak (2013) dan Persamaan Diferensial I (2016). Karya lainnya berupa artikel hasil penelitian dipublikasikan melalui Jurnal Keguruan dan Ilmu Pendidikan. Untuk mengembangkan kemampuan dalam melakukan proses pembelajaran, penulis juga bergabung sebagai anggota Himpunan Matematika Indonesia (*The Indonesian Mathematical Society*, IndoMS). Sebagai seorang dosen, tentu saja aktivitas utama penulis dalam melaksanakan pendidikan dan pengajaran adalah mengajar. Mata kuliah yang diampu adalah Matematika Diskrit, Struktur Aljabar, dan Pembelajaran Berbasis Teknologi Informatika dan Komunikasi, dan Metode Numerik.

RIWAYAT HIDUP

Selvi Rajuaty Tandiseru lahir pada tanggal 4 September 1980 di Rantepao Kabupaten Toraja Utara, adalah alumni dan dosen tetap Program Studi Pendidikan Matematika – Universitas Kristen Indonesia Toraja. Setelah menyelesaikan pendidikan Sarjana Pendidikan Matematika, pada tahun 2003, penulis melanjutkan studi ke program pascasarjana Universitas Gadjah Mada dan memperoleh gelar M.Sc. pada tahun 2008. Selanjutnya, penulis mengikuti program S3 di Universitas Pendidikan Indonesia dan berhasil mempertahankan disertasi yang berjudul *Peningkatan Keterampilan Berpikir Kreatif, Pemecahan Masalah Matematis dan Self Awareness Siswa Melalui Pembelajaran Heuristik-KR* sehingga memperoleh gelar doktor pada tahun 2015.

Selain melaksanakan penelitian dan pengabdian kepada masyarakat, penulis aktif mengikuti kegiatan seminar nasional maupun internasional untuk memperluas wawasan sebagai seorang dosen dalam bidang matematika. Mata kuliah yang diampu adalah Analisis Real dan Struktur Aljabar. Penulis juga adalah salah seorang anggota Himpunan Matematika Indonesia (*The Indonesian Mathematical Society*, IndoMS). Karya ilmiah yang dihasilkan telah dipublikasikan melalui jurnal ilmiah PANRITA, Jurnal Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Prosiding Seminar Nasional, dan *Journal of Education and Practice* IISTE.

Dasar-Dasar Matematika Diskrit Dengan Pendekatan Problem Solving

Buku ini terdiri atas enam bab yang diawali dengan pembahasan Dasar-Dasar Logika dan Pembuktian Matematika. Hal ini dimaksudkan untuk meletakkan landasan yang cukup kuat bagi mahasiswa dalam mempelajari logika matematika sehingga memiliki kemampuan yang memadai untuk memahami materi kuliah lainnya dalam bidang matematika. Agar mahasiswa dapat memperoleh pengalaman dalam menyelesaikan berbagai jenis kasus, pembahasan masing-masing bab disertai dengan banyak contoh penyelesaian soal-soal. Demikaian juga pada akhir setiap bab diberikan soal-soal latihan yang proporsional dengan contoh soal yang telah dibahas.

Bab-bab selanjutnya tentang Dasar-Dasar Kombinatorika, menguraikan tentang prinsip pencacahan menurut matematika diskrit. Dengan memahami dasar-dasar kombinatorika pada bab ini diharapkan mahasiswa dapat mengembangkan kemampuan kombinatorik dalam melakukan perhitungan-perhitungan lanjut dengan menggunakan Permutasi dan Kombinasi, Prinsip Inklusi-Eksklusi, Fungsi Pembangkit, dan Relasi Rekurensi.

ISBN: 978-602-18328-8-2